BIBL. NAZIONALE
CENTRALE-FIRENZE
7 6
6

LA STATICA

DEI SISTEMI DI FORMA INVARIABILE

OPUSCOLO

DEL DOTT. FRANCESCO BRIOSCHI

PROF. ORD. DI MATEMATICA APPLICATA NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PAVIA

MILANO

DOTT. FRANCESCO VALLARDI (TIPOGRAFO-EDITORE)

Contrada S. Margherita N. 2

1859

13
6

LA STATICA

DEI SISTEMI DI FORMA INVARIABILE

Digitized by Google

Digitized by Google

76
6

LA STATICA

DEI SISTEMI DI FORMA INVARIABILE

OPUSCOLO

DEL DOTT. FRANCESCO BRIOSCHI

PROF. ORD. DI MATEMATICA APPLICATA NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PAVIA

BIBLIOTECA NAZIONALE 1872 FIRENZE

BIBLIOTECA NAZIONALE FIRENZE

MILANO
DOTT. FRANCESCO VALLARDI (TIPOGRAFO-EDITORE)
Contrada S. Margherita N. 5.

1859

Digitized by Google

Il presente Opuscolo è posto sotto la tutela delle veglianti leggi e convenzioni dei Governi d'Italia, che concorsero a garantire le proprietà letterarie.

Digitized by Google

INDICE

DEDICA. Al Dott. Giuseppe Ambrosoli . . . . . pag. VII

CAPITOLO I. — Composizione e decomposizione delle forze applicate ad un punto . . . . . » 1

CAPITOLO II. — Composizione e decomposizione dei sistemi di due forze parallele, e teorica delle coppie . . . . . » 11

CAPITOLO III. — Composizione dei sistemi di forma invariabile . . . » 20

CAPITOLO IV. — Della coppia risultante di momento minimo, e della distribuzione degli assi delle coppie nello spazio . » 28

CAPITOLO V. — Proprietà delle coppie risultanti . . . . . » 34

CAPITOLO VI. — Relazioni fra i momenti delle coppie risultanti e componenti . . . . . » 46

CAPITOLO VII. — Dei sistemi di forma invariabile riducibili ad una risultante, e del centro delle forze . . . . . » 53

CAPITOLO VIII. — Delle condizioni per l'equilibrio di un sistema di forze applicate ad un punto . . . . . » 64

CAPITOLO IX. — Delle condizioni per l'equilibrio di un sistema di forma invariabile, e dell'asse di equilibrio . . . . . » 68

NOTA . . . . . » 77

Al Dott. Giuseppe Ambrosoli.

Carissimo Amico,

Promettendomi l'opera tua nella revisione delle prove di stampa mi spingesti a publicare questo opuscolo, nel quale ho raccolto le mie lezioni sulla statica razionale dei sistemi di forma invariabile. A te perciò lo indirizzo in segno di gratitudine.

Settembre 1858.

Il tuo Brioschi.

Digitized by Google

LA STATICA

DEI SISTEMI DI FORMA INVARIABILE

CAPITOLO I.

Composizione e decomposizione delle forze applicate ad un punto.

1.° Considerando due o più forze agenti sopra un medesimo punto, denominasi loro *risultante* la forza che produce lo stesso effetto di esse; ed alle forze medesime si dà il nome di *componenti*.

Comporre due o più forze applicate ad un punto significa determinare gli elementi necessarj ad individuare la risultante di quelle forze. Per ottenere questi elementi nel caso particolare in cui si considerino due sole forze agenti sopra un punto incominciamo dal supporre che quelle forze sieno eguali. È evidente che in questa ipotesi la direzione della risultante dividerà per metà l'angolo compreso dalle direzioni delle componenti, per cui non rimarrà a determinarsi che la sua grandezza. Ora l' effetto prodotto da quelle due componenti deve manifestamente mutare variando la grandezza di quelle forze e l' angolo compreso

dalle direzioni delle medesime; quindi indicando con P la grandezza comune delle componenti, con 2ω l'angolo che comprendono le loro direzioni, e con R la grandezza cercata della risultante sarà:

$$R = f(P, \omega).$$

Immaginiamo applicate al medesimo punto due altre forze di grandezze pure eguali fra loro ed eguali a Q, le direzioni delle quali coincidano con quelle delle prime componenti; sarà $f(Q, \omega)$ la grandezza della risultante di queste forze, e la direzione della stessa coinciderà con quella della prima risultante. Ma noi possiamo ritenere come agenti sul punto due forze ciascuna di grandezza $P + Q$ e le direzioni delle quali comprendono un angolo 2ω; e siccome la direzione della risultante di queste coinciderà colla comune alle prime due risultanti, e la grandezza di questa sarà $f(P + Q, \omega)$, si avrà:

$$f(P + Q, \omega) = f(P, \omega) + f(Q, \omega).$$

Ora

$$f(P \pm Q, \omega) = f(Q, \omega) + P f'(Q) + \tfrac{1}{2} P^2 f''(Q) + \ldots.$$

per cui sostituendo:

$$f(P, \omega) = P f'(Q) + \tfrac{1}{2} P^2 f''(Q) + \ldots.;$$

ed osservando che il primo membro di quest'ultima è indipendente da Q, si otterrà:

$$(1) \qquad f(P, \omega) = P \varphi(\omega),$$

essendo $\varphi(\omega)$ una funzione della sola ω.

Si immaginino agenti sul punto quattro nuove forze, la grandezza comune delle quali sia S; indichiamole per maggior chiarezza con A, B, C, D; e supponiamo che le direzioni di due di esse, per esempio delle B, C, comprendano ciascuna colla direzione della risultante di grandezza R un angolo eguale a $\omega - \delta$; e che le direzioni delle

altre due A, D, comprendano ciascuna colla direzione della medesima risultante un angolo eguale ad $\omega+\theta$. È chiaro che l'angolo compreso dalle direzioni di due di quelle forze A, B, sarà diviso per metà dalla direzione di una delle componenti di grandezza P, ed analogamente per l'angolo compreso dalle direzioni delle altre due C, D. Quindi le direzioni di quelle componenti saranno anche le direzioni delle risultanti delle forze A, B e delle C, D. Ora la grandezza di ciascuna di queste risultanti sarà per la (1) eguale ad $S\varphi(\theta)$; quindi la grandezza della risultante di queste risultanti parziali sarà:

$$S\varphi(\theta)\varphi(\omega)$$

e sarà diretta come la risultante di grandezza R. Ma questa è pure la direzione della risultante delle forze B, C e di quella delle forze A, D; e siccome le grandezze di queste risultanti sono $S\varphi(\omega-\theta)$, $S\varphi(\omega+\theta)$ si avrà:

$$S\varphi(\theta)\varphi(\omega)=S\varphi(\omega+\theta)+S\varphi(\omega-\theta)$$

cioè dovrà essere:

$$\varphi(\theta)=2\left(1+\frac{\theta^2}{2}\frac{\varphi''(\omega)}{\varphi(\omega)}+\frac{\theta^4}{2.3.4}\frac{\varphi^{iv}(\omega)}{\varphi(\omega)}+\ldots\right)$$

epperò:

$$\varphi''(\omega)=a\varphi(\omega),\qquad \varphi^{iv}(\omega)=a^2\varphi(\omega),\ \text{ecc.}$$

essendo a una costante. Quindi sostituendo si avrà:

$$\varphi(\theta)=2\left(1+a\frac{\theta^2}{2}+a^2\frac{\theta^4}{2.3.4}+\ldots\right)$$

ed

$$R=2P\left(1+\frac{a\omega^2}{2}+\frac{a^2\omega^4}{2.3.4}+\ldots\right).$$

La costante a deve essere reale affinchè lo sia il valore di R; deve inoltre essere negativa mentre nel caso con-

trario risulterebbe $R > 2P$ il che è evidentemente assurdo. Posto $a = -c^2$ si avrà:

$$R = 2P \cos. c\omega;$$

ma quando $\omega = \frac{\pi}{2}$ essendo nullo l'effetto delle componenti dovrà essere $R = 0$, ed in conseguenza c un numero dispari. Suppongasi $c = 2n + 1$ ed $\omega = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2}$, risulterebbe $R = 0$ e l'effetto delle due componenti dovrebbe essere nullo; il che è assurdo fuorchè nel caso di $n = 0$; sarà quindi $c = 1$ ed

$$(2) \qquad R = 2P \cos. \omega.$$

2.° Consideriamo ora due forze disuguali di grandezze P, Q, di cui le direzioni comprendano un angolo retto. Si immagini la direzione della risultante A di queste forze ed indicando α l'angolo che essa comprende colla direzione della prima componente, si consideri la forza di grandezza P come la risultante di due forze a, b, ciascuna di grandezza indeterminata X, la direzione della prima delle quali sia quella della risultante A. Così si consideri la forza di grandezza Q come la risultante di due forze c, d, ciascuna di grandezza indeterminata Y, e la direzione della c coincida colla direzione della risultante A. Evidentemente le forze b, d avranno la medesima direzione ed agiranno per verso contrario; inoltre per la (2) si avranno le

$$P = 2X \cos. \alpha, \qquad Q = 2Y \text{ sen. } \alpha.$$

Incomincierò dal dimostrare che le grandezze X, Y delle forze a, b; c, d sono eguali. Infatti supponiamo $Y > X$; alle due forze b, d potremo sostituire una sola forza di grandezza $Y - X$ secondo la direzione ed agente pel verso della d. Quindi alle due forze date verremmo a sostituire due altre forze l'una di grandezza $X + Y$ di cui la direzione coincide con quella della risultante A, l'altra di

grandezza $Y - X$ a seconda della direzione della *d*. Componendo queste due forze si otterrebbe una risultante la direzione della quale non sarebbe evidentemente quella della risultante A; e quindi anche la risultante delle due forze date dovrebbe avere una direzione differente dalla supposta. Dunque dovrà essere $X = Y$ e

$$P = 2X \cos. \alpha, \qquad Q = 2X \text{ sen. } \alpha;$$

e siccome l'effetto delle due forze *b*, *d* è nullo, ne risulta essere 2X la grandezza della risultante delle due forze date. Quindi, se le direzioni di due forze agenti sopra un medesimo punto comprendono un angolo retto, la grandezza di una qualunque di esse è eguale alla grandezza della risultante delle medesime forze, moltiplicata pel coseno dell'angolo che la direzione di quella forza comprende colla direzione della risultante.

3.° Sieno ora P, Q le grandezze di due forze, le direzioni delle quali comprendano un angolo ω; si immagini pel punto di applicazione delle medesime condotta una retta e sia α l'angolo indeterminato che questa comprende colla direzione della forza P; e si suppongano applicate al punto due nuove forze di grandezze indeterminate Y_1, Y_2 dirette perpendicolarmente a quella retta ed agenti per verso contrario. Considerando la componente di grandezza P come la risultante della forza di grandezza Y_1 e di una forza di grandezza X_1 di cui la direzione coincide colla retta immaginata, si avranno le equazioni

$$X_1 = P \cos. \alpha, \qquad Y_1 = P \text{ sen. } \alpha;$$

ed analogamente, posto $\omega - \alpha = \beta$, le

$$X_2 = Q \cos. \beta, \qquad Y_2 = Q \text{ sen. } \beta;$$

e le quattro forze di cui le grandezze sono X_1, X_2, Y_1, Y_2 produrranno il medesimo effetto delle due date. Ma determinando l'angolo α in modo che sia $Y_1 = Y_2$ l'effetto di queste due forze è nullo; quindi l'effetto delle due componenti

sarà eguale a quello delle due forze di grandezze X_1, X_2 o della forza unica di grandezza $X_1 + X_2$; e questa forza sarà quindi la risultante delle forze date. Indicandone con R la grandezza, si avranno così le due equazioni:

$$R = P \cos. \alpha + Q \cos. \beta$$

$$0 = P \text{ sen. } \alpha - Q \text{ sen. } \beta;$$

le quali quadrate e sommate danno la

$$(3) \qquad R^2 = P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos. \omega;$$

e moltiplicando la prima per sen. β, la seconda per cos. β, e sommandole; oppure la prima per sen. α, la seconda per cos. α, e sottraendo questa da quella, si ottengono le

$$R \text{ sen. } \beta = P \text{ sen. } \omega, \qquad R \text{ sen. } \alpha = Q \text{ sen. } \omega;$$

cioè osservando alla seconda delle superiori:

$$(4) \qquad P : Q : R = \text{sen. } \beta : \text{sen. } \alpha : \text{sen. } \omega.$$

Osservando che supposto essere noti i valori di P, Q, ω dalle relazioni (3) (4) deduconsi quelli di R, α; e supposto conosciuti quelli di R, α, β si hanno dalle (4) quelli di P, Q; ne risulta che mediante le relazioni stesse si potrà in ogni caso operare la composizione di due forze concorrenti, e la decomposizione di una forza in due altre concorrenti.

Allorquando l'angolo ω è retto, la (3) diventa la

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

e le (4) mostrano essere

$$P = R \cos. \alpha, \qquad Q = R \text{ sen. } \alpha$$

come si è già trovato.

4.° Conosciute le leggi per la composizione di due forze applicate ad un punto è evidente come ripetendo questa operazione si possa effettuare la composizione di un numero qualunque di forze applicate ad un punto. Ma per raggiungere più facilmente questo scopo incominceremo

dal considerare il caso particolare di tre forze dirette ortogonalmente, al quale può ridursi il caso generale. Sieno P, Q, R le grandezze delle tre componenti, S la grandezza della risultante delle prime due, ed ω l'angolo che la direzione di questa comprende colla direzione della componente di grandezza P. Si hanno le equazioni:

$$(5) \quad S^2 = P^2 + Q^2, \quad P = S \cos. \omega, \quad Q = S \text{ sen. } \omega.$$

Compongo le forze di grandezza S, R, ed indico con T la grandezza della loro risultante e con γ l'angolo che la direzione di questa comprende colla direzione della forza R; si avranno le

$$T^2 = S^2 + R^2, \quad R = T \cos. \gamma, \quad S = T \text{ sen. } \gamma$$

dalle quali e dalle (5) si ottengono le:

$$T^2 = P^2 + Q^2 + R^2, \; P = T \text{ sen. } \gamma . \cos. \omega, \; Q = T \text{ sen. } \gamma . \text{ sen. } \omega$$

per cui denominando α, β gli angoli che la direzione della forza di grandezza T comprende colle direzioni delle componenti di grandezze P, Q si hanno le

$$P = T \cos. \alpha, \qquad Q = T \cos. \beta.$$

Le quattro formole:

$$T^2 = P^2 + Q^2 + R^2$$

$$P = T \cos. \alpha, \qquad Q = T \cos. \beta, \qquad R = T \cos. \gamma$$

contengono le leggi per la composizione di tre forze applicate ad un punto e dirette ortogonalmente, giacchè per la doppia composizione sopra operata la forza di grandezza T è evidentemente la risultante delle tre forze date di grandezze P, Q, R. Col mezzo delle ultime tre fra queste equazioni si effettua la decomposizione di una forza in tre altre dirette ortogonalmente. Quindi data una forza di grandezza T ed una retta che comprenda colla direzione di essa un angolo α si dirà essere T cos. α la grandezza

della componente della medesima diretta secondo quella retta; giacchè immaginando due altre rette ortogonali fra loro ed alla prima, operando la decomposizione di quella forza si otterrà appunto quale componente diretta secondo la prima retta una forza di grandezza T cos. α.

5.° Consideriamo ora il caso generale di un numero qualunque di forze applicate ad un punto, e dirette comunque nello spazio. Indichiamo con P_1, P_2, ... P_n le grandezze delle forze medesime; con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; ... $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ i coseni degli angoli che le direzioni di esse forze fanno ordinatamente con tre rette ortogonali. Immaginiamo fatta la decomposizione di ciascuna di quelle forze in tre parallele ciascuna a ciascuna alle tre rette ortogonali; le grandezze delle componenti saranno per la prima forza

$$P_1 \alpha_1,\ P_1 \beta_1,\ P_1 \gamma_1;$$

per la seconda

$$P_2 \alpha_2,\ P_2 \beta_2,\ P_2 \gamma_2;\quad \text{ecc.}$$

Queste $3n$ forze produrranno il medesimo effetto che le n forze date, quindi potremo considerare come agenti sul punto quelle in luogo di queste; ma le forze di grandezze $P_1 \alpha_1$; $P_2 \alpha_2$ ..... sono dirette secondo una stessa retta, per cui la direzione della risultante di esse coinciderà con quella retta, e la sua grandezza sarà eguale alla somma algebrica delle grandezze di quelle componenti. Indicando con X la grandezza di questa risultante; P la grandezza di una qualunque fra le forze date; α, β, γ i coseni degli angoli che la direzione di questa forza comprende colle tre rette ortogonali; rappresenteremo questo risultato colla scrittura

$$X = \Sigma P \alpha;$$

ed analogamente si avranno le due

$$Y = \Sigma P \beta,\quad Z = \Sigma P \gamma.$$

Le tre risultanti parziali di cui le grandezze sono X, Y, Z produrranno lo stesso effetto di quelle $3n$ forze e quindi anche delle n date. Ma quelle tre forze sono dirette ortogonalmente, per cui denominata R la grandezza della loro risultante, ed a, b, c i coseni degli angoli che la direzione di questa fa colle tre rette ortogonali si hanno le

$$(5) \qquad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$a = \frac{X}{R}, \qquad b = \frac{Y}{R}, \qquad c = \frac{Z}{R};$$

col mezzo delle quali viene determinata la grandezza e la direzione della risultante delle n forze date.

Se le forze date saranno dirette in un piano, si potrà operare la decomposizione parallelamente a due rette ortogonali situate nel medesimo piano; e procedere come si è fatto sopra pel caso generale delle forze dirette comunque.

6.° I valori (5) di R; a, b, c si ponno trasformare introducendo in luogo degli angoli che le direzioni delle forze fanno con tre rette ortogonali, gli angoli che le direzioni stesse comprendono fra loro. Per operare questa trasformazione del valore di R non si ha che ad eseguire la somma dei quadrati dei tre polinomi:

$$\Sigma P \alpha, \qquad \Sigma P \beta, \qquad \Sigma P \gamma;$$

osservando che se rappresentasi con $\widehat{P_r P_s}$ l'angolo che la direzione della forza di grandezza P_r fa colla direzione della forza di grandezza P_s si ha:

$$\cos. \widehat{P_r P_s} = \alpha_r \alpha_s + \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s,$$

per cui ottiensi:

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2 \Sigma P_r P_s \cos. \widehat{P_r P_s}$$

Siccome poi indicando con $\widehat{RP_r}$ l'angolo che la direzione

della risultante fa con quella della forza di grandezza P_r si ha

$$\cos. \widehat{RP_r} = a\,\alpha_r + b\,\beta_r + c\,\gamma_r\,,$$

si avrà:

$$\cos. \widehat{RP_r} = \frac{1}{R}\,\Sigma\,P_r \cos. \widehat{P_r P_r}$$

per mezzo della quale si determineranno gli angoli che le direzioni di ciascuna delle forze date forma colla direzione della loro risultante.

Quest' ultima formola è un caso particolare di un' altra che si ottiene nel modo seguente. Indico con L una retta la quale faccia colle tre rette ortogonali angoli di cui i coseni sieno l, m, n; e con $\widehat{RL}$, $\widehat{PL}$, gli angoli che le direzioni delle forze di grandezza R, P, comprendono con quella retta. Moltiplicando le equazioni seconda, terza, quarta delle (5) per l, m, n e sommando quelle che ne risultano, giungesi alla

$$R \cos. \widehat{RL} = \Sigma\,P \cos. \widehat{PL}\,;$$

cioè la somma algebrica delle grandezze delle componenti, dirette secondo una retta, di un numero qualunque di forze applicate ad un punto è eguale alla grandezza della componente, secondo la retta stessa, della risultante di quelle forze. Deducesi che quando si abbia un numero qualunque di forze applicate ad un punto, la somma algebrica delle grandezze delle componenti di esse forze secondo la direzione della risultante è eguale alla grandezza della risultante medesima; e secondo una retta perpendicolare a quella direzione è eguale a zero.

Digitized by Google

CAPITOLO II.

Composizione e decomposizione dei sistemi di due forze parallele, e teorica delle coppie.

1.° Due o più forze si chiamano parallele allorquando lo siano le loro direzioni; se inoltre i punti di applicazione delle medesime sono uniti fra loro invariabilmente, il complesso di quelle forze denominasi *sistema* di forze parallele.

Consideriamo un sistema di due forze parallele agenti pel medesimo verso. Indichiamo con P, Q le grandezze di queste forze ed ai rispettivi punti di applicazione supponiamo applicate due forze di eguale grandezza X, dirette secondo la retta che unisce invariabilmente quei punti di applicazione, ed agenti per verso contrario. L'aggiunta di queste nuove forze non altererà l' effetto del sistema. Determino la risultante delle forze di grandezze Q ed X applicate ad un punto, e la risultante delle forze di grandezze Q ed X applicate all' altro punto. Le direzioni di queste risultanti si incontreranno evidentemente; quindi se assumiamo come punti di applicazione delle medesime quello di intersezione delle loro direzioni il problema è ridotto alla ricerca della risultante di due forze concorrenti. Questa ricerca si rende assai semplice osservando che decomposte quelle risultanti parziali secondo due rette, l'una parallela alla direzione delle forze del sistema e l'altra parallela alla retta che unisce i punti di applicazione di esse forze, le componenti dirette secondo la prima retta

Digitized by Google

saranno ordinatamente di grandezze P, Q ed agenti pel medesimo verso, e quindi equivarranno ad una forza unica di grandezza P + Q, e le componenti dirette secondo l'altra retta saranno ambedue di grandezza X ed agenti per verso contrario, talchè l' effetto di esse sarà nullo. Quindi la direzione della risultante di un sistema di due forze parallele agenti pel medesimo verso è parallela a quella delle forze, e la sua grandezza è eguale alla somma delle grandezze di esse. Se poi osserviamo che indicando con α la inclinazione di ciascuna forza alla retta che unisce i loro punti di applicazione, con θ ed ω gli angoli che le direzioni delle prime due risultanti parziali comprendono ordinatamente colle direzioni delle forze di grandezze P, Q si hanno le

$$Q \text{ sen. } \omega = X \text{ sen. } (\alpha - \omega) \qquad P \text{ sen. } \theta = \text{sen. } (\alpha + \theta);$$

ed inoltre indicando con h, k le porzioni della retta che unisce i punti di applicazione delle forze, porzioni intercette fra questi punti ed il punto di intersezione della retta medesima colla direzione della risultante; e con l la porzione di essa direzione compresa fra quest' ultimo punto ed il punto di intersezione delle direzioni delle risultanti parziali, si hanno le

$$l \text{ sen. } \omega = k \text{ sen. } (\alpha - \omega) \qquad l \text{ sen. } \theta = h \text{ sen. } (\alpha + \theta)$$

si avrà anche la

$$(1) \qquad \frac{h}{k} = \frac{Q}{P}.$$

Dunque la direzione della risultante di un sistema di due forze parallelle sega la retta che unisce i loro punti di applicazione in un punto tale che le distanze da esso a quei due punti sono reciprocamente proporzionali alle grandezze delle forze.

Questa proprietà sussiste anche se le forze agiscono per verso contrario, nel qual caso ragionando come sopra di-

Digitized by Google

mostrasi che la grandezza della risultante è eguale alla differenza fra le grandezze delle componenti, e che la sua direzione è parallela a quella di esse. Supponendo $P > Q$ ed indicando con R la grandezza della risultante si ha quindi:

$$R = P - Q$$

e dalla (1) posto

$$\delta = k - h$$

si deducono le

$$(2) \qquad h = \delta \frac{Q}{R}, \quad k = \delta \frac{P}{R}.$$

Ora se le forze del sistema fossero eguali ed agenti per verso contrario, risulterebbero per le equazioni superiori $R = 0$ ed i valori di h, k infiniti; ma siccome evidentemente l'effetto di quelle forze non deve essere nullo ne risulta che in questo caso non può trovasi una forza sola che produca lo stesso effetto del sistema, cioè che quel sistema non è riducibile ad una sola risultante. Questi sistemi di due forze eguali, parallele, agenti per verso contrario si denominano *coppie*.

Le (2) danno le formole per la decomposizione di una forza in due altre parallele. Infatti da quelle equazioni si ricavano le

$$P = \frac{k}{\delta} R, \quad Q = \frac{h}{\delta} R$$

le quali daranno i valori di P, Q allorquando siano dati quelli di R, h, k; ed in generale date tre fra le cinque quantità P, Q, R, h, k mediante quelle equazioni si determineranno le altre due.

2.° Riterremo che la retta la quale unisce i punti di applicazione delle forze di una coppia sia perpendicolare alla loro direzione, potendosi sempre fare in modo che questo abbia luogo trasportando opportunamente il punto di applicazione di una delle forze sulla propria direzione. La por-

zione di questa retta intercetta fra que' punti di applicazione si denomina braccio della coppia; ed il prodotto della lunghezza del braccio per la grandezza di una delle forze, momento della coppia. Quindi indicando con P la grandezza comune delle forze di una coppia, con p il braccio e con M il momento della medesima sarà:

$$M = Pp;$$

e siccome il prodotto $P.p$ può ritenere lo stesso valore variando in infiniti modi i valori dei fattori P e p, ne risulta che infinite coppie, differenti per braccio e per grandezze di forze, ponno avere lo stesso momento. Immaginiamo due di queste coppie e sia per l'una:

$$M = Pp$$

e per l'altra:

$$M = Qq;$$

dimostrasi facilmente che se $Pp = Qq$ queste coppie producono il medesimo effetto. Infatti denominando per brevità con A, B gli estremi del braccio della prima coppia, suppongasi il braccio stesso prolungato di una parte B C eguale in lunghezza a q, ed applicate a ciascuno dei punti B, C due forze eguali in grandezza a Q, dirette parellelamente alla direzione delle forze della prima coppia, ed agenti per verso contrario. L' aggiunta di queste quattro forze non altererà l'effetto prodotto dalla prima coppia; ma componendo le forze di grandezze P e Q applicate ai punti A, C ed agenti pel medesimo verso, ottiensi una risultante di grandezza P + Q di cui la direzione per essere $Pp = Qq$ incontra la retta A C nel punto B. L'effetto di questa risultante distruggerà in conseguenza quello delle forze di grandezze P, Q applicate al punto B; per cui l' effetto di quelle sei forze equivarrà anche a quello delle due forze di grandezza Q applicate ai punti B, C ed agenti per verso contrario, cioè all' effetto prodotto dalla coppia di braccio q. Dunque due coppie di cui i momenti

sieno eguali producono lo stesso effetto, o ponno sostituirsi l'una all'altra; cioè il momento di una coppia è la misura della sua intensità.

3.° Chiamasi piano di una coppia il piano individuato dalle direzioni delle sue forze. L'effetto però di una coppia non cambia se da una posizione venga trasportata in un'altra nel proprio piano, purchè le estremità del braccio della coppia nella seconda posizione sieno uniti invariabilmente ai punti del piano che coincidevano colle estremità del braccio della coppia nella prima posizione. Infatti nel piano di una coppia qualunque si immagini dapprima una retta parallela e di lunghezza eguale al suo braccio. Detti A, B per brevità gli estremi del braccio della coppia; A_1, B_1, quelli della retta, si suppongano uniti invariabilmente i punti A, B_1 ed i punti A_1, B; quindi applicate tanto al punto A_1 quanto al punto B_1 due forze ciascuna di grandezza eguale a quella delle forze della coppia, parallele alle medesime ed agenti per verso contrario. L'effetto di queste quattro forze sarà nullo, e quindi l'effetto del complesso di quelle sei forze dirette nel piano equivale a quello della coppia. Ma componendo le due forze parallele applicate ai punti A, B_1 ed agenti pel medesimo verso e le due forze analoghe applicate ai punti B, A_1, si ottengono due risultanti di cui gli effetti manifestamente si elidono; dunque l'effetto di quelle sei forze equivale anche a quello delle due applicate ai punti A_1, B_1 parallele, eguali ed agenti per verso contrario, cioè a quello della coppia di cui il braccio è $A_1 B_1$. Immaginiamo ora nel piano di una coppia una retta di lunghezza eguale al suo braccio, e situata in modo che il punto di mezzo di essa coincida con quello del braccio; denominate ancora A, B, A_1, B_1 le estremità del braccio e della retta, si suppongano applicate ai punti A_1, B_1 quattro forze come superiormente. Componendo le due forze concorrenti, ma applicate l'una in A l'altra in A_1, e le due applicate in B e B_1, si ottengono due risultanti di grandezze eguali, co-

incidenti in direzione ed agenti per verso contrario. Per cui l'effetto del complesso delle sei forze equivarrà a quello della sola coppia di cui il braccio è $A_1 B_1$. Queste due proprietà conducono alla più generale enunciata sopra; anzi osservando che la dimostrazione della prima di esse vale anche pel caso che la coppia venga trasportata dal proprio piano in un piano parallelo ad esso, si avrà che sotto la condizione esposta una coppia può essere trasportata nel proprio piano od in un piano parallelo ad esso in un modo qualunque.

4.° Allorquando si consideri il complessivo effetto di molte coppie situate in un piano è necessario distinguere il verso secondo il quale esse agiscono. A ciò si potrà immaginare che i punti di mezzo dei bracci di ciascuna coppia sieno fissi, ed il verso secondo cui agisce una qualunque di esse sarà il verso secondo cui la coppia tenderebbe a ruotare intorno quel punto fisso. Si avranno quindi coppie le quali agiscono da destra a sinistra, ed altre agenti da sinistra a destra.

E nello stesso modo che dietro una stabilita convenzione applichiamo segno positivo ovvero negativo alle grandezze di due forze agenti per verso contrario nella medesima direzione; i momenti di due coppie poste in uno stesso piano ed agenti per verso contrario si riterranno come affetti da segni disuguali.

Ciò posto supponiamo si vogliano comporre due coppie situate in un medesimo piano; cioè si voglia determinare una coppia che produca lo stesso effetto di quelle. Sieno P, Q le grandezze delle forze per l'una e per l'altra coppia; p e q i rispettivi bracci. Immaginiamo una terza coppia di braccio p e di forza di grandezza X che produca il medesimo effetto della seconda delle date; dovrà essere:

$$Qq = Xp;$$

quindi si supponga trasportata quest'ultima coppia in modo che il suo braccio venga a coincidere col braccio della

prima. È chiaro che se le due coppie date agiscono pel medesimo verso risulteranno applicate a ciascuna delle estremità del braccio comune due forze di grandezze P, X agenti pure pel medesimo verso, e che se le coppie date sono di verso contrario ciò avrà anche luogo per quelle forze. Nel primo caso si avrà quindi una sola coppia di braccio p e per la quale la grandezza delle forze è $P + X$; e nel secondo si otterrà una sola coppia pure di braccio p e per la quale la grandezza della forza è $P - X$ supposto $P > X$. I momenti di queste coppie saranno quindi dati dalla

$$M = (P \pm V)p$$

ossia per l'equazione superiore:

$$M = Pp \pm Qq$$

cioè sarà il momento della coppia risultante eguale alla somma algebrica dei momenti delle coppie componenti.

La composizione di un numero qualunque di coppie situate in un medesimo piano si opera ripetendo l'operazione un sufficiente numero di volte, e così anche se le coppie sono situate in piani paralleli, trasportandole prima in uno stesso piano. Quindi il momento della coppia risultante di un numero qualsivoglia di coppie poste nello stesso piano od in piani paralleli è eguale alla somma algebrica dei momenti delle coppie componenti.

Si considerino ora due coppie di cui i piani sieno perpendicolari fra loro; P, Q sieno le grandezze delle forze rispettive; p, q le lunghezze dei bracci; si immagini che la seconda coppia venga sostituita da un' altra di cui il braccio sia eguale a p e la grandezza della forza sia X determinata dall' equazione $Xp = Qq$. Si trasportino la prima delle coppie date e quest' ultima, ciascuna nel proprio piano, in modo che i bracci delle medesime, disponendosi secondo la retta comune intersezione dei piani, vengano a coincidere. Ad ognuna delle estremità del brac-

cio comune saranno così applicate due forze le direzioni delle quali comprendono un angolo retto. Componendo queste forze si otterranno due risultanti, la grandezza comune delle quali verrà data dalla

$$R^2 = P^2 + X^2$$

e di cui le direzioni sono parallele; quindi indicando con ω l'angolo che ciascuna di esse comprende colla direzione della forza di grandezza P si hanno le

$$\cos.\ \omega = \frac{P}{R},\quad \text{sen.}\ \omega = \frac{X}{R}.$$

Ne risulta che alla coppia data si può sostituire una coppia sola di braccio p e di forza di grandezza R; il momento di quella coppia sarà

$$M = p\,R,$$

o sostituendo

$$M^2 = p^2\,(P^2 + X^2) = p^2\,P^2 + q^2\,Q^2;$$

cioè il quadrato del momento della coppia risultante di due coppie situate in piani ortogonali è eguale alla somma dei quadrati delle coppie componenti. Si hanno inoltre le

$$\cos.\ \omega = \frac{Pp}{Rp} = \frac{Pp}{M},\quad \text{sen.}\ \omega = \frac{Xp}{Rp} = \frac{Qq}{M}$$

le quali determinano la posizione del piano della coppia risultante.

Passiamo alla composizione di tre coppie i piani delle quali sieno ortogonali fra loro. Indico con P, Q, R le grandezze delle forze per ciascuna coppia e con p, q, r i rispettivi bracci; componendo le prime due coppie ed indicando con N il momento della coppia risultante, e con ω l'angolo che il piano di essa comprende con quello della prima coppia si hanno le

$$N^2 = P^2p^2 + Q^2q^2$$

$$\cos.\ \omega = \frac{Pp}{N},\quad \text{sen.}\ \omega = \frac{Qq}{N};$$

e le coppie di cui i momenti sono N ed Rr produrranno lo stesso effetto delle tre date. I piani di queste ultime due coppie sono ortogonali, per cui indicando con M il momento della loro coppia risultante, e con γ l'angolo che il piano di questa comprende col piano della coppia di momento Rr, si avranno le

$$M^2 = N^2 + R^2r^2, \quad \cos.\gamma = \frac{Rr}{M}, \quad \text{sen.}\,\gamma = \frac{N}{M};$$

e siccome indicando con α, β gli angoli che il piano della coppia risultante comprende con quelli delle prime due componenti, si hanno le

$$\cos.\alpha = \text{sen.}\,\gamma \cos.\omega, \quad \text{sen.}\,\alpha = \text{sen.}\,\gamma\,\text{sen.}\,\omega,$$

si otterrà:

$$(3) \qquad M^2 = P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2$$

$$\cos.\alpha = \frac{Pp}{M}, \quad \cos.\beta = \frac{Qq}{M}, \quad \cos\gamma = \frac{Rr}{M}.$$

Queste equazioni contengono le leggi per la composizione di tre coppie situate in tre piani ortogonali, e per la decomposizione di una coppia in tre poste in piani ortogonali. Nel primo caso la prima delle equazioni (3) determinerà il momento della coppia risultante, e le altre la posizione del piano di essa; nel secondo caso mediante le ultime tre equazioni (3) si determineranno i valori dei momenti delle coppie componenti, supposti conosciuti i valori di M e quelli di due fra gli angoli α, β, γ.

È evidente che volendosi comporre molte coppie situate in tre piani ortogonali, si dovrà comporre dapprima quelle che sono situate in ciascuno dei piani; quindi, ridotto il sistema a tre sole coppie, eseguire la composizione di queste come sopra. Quindi per comporre un numero qualsivoglia di coppie situate in piani diretti comunque nello spazio, si decomporrà ciascuna coppia in tre situate in tre piani ortogonali, ed operate le tre composizioni parziali, si otterrà il momento della coppia risultante e la posizione del suo piano mediante le equazioni (3).

CAPITOLO III.

Composizione dei sistemi di forma invariabile.

1.° Denominasi sistema di forma invariabile un sistema di punti connessi fra loro invariabilmente ai quali sieno applicate delle forze dirette comunque nello spazio. Supporremo che ad ogni punto sia applicata una sola forza, potendosi questo sempre ottenere mediante composizioni parziali.

Comporre un sistema di forma invariabile significa determinare il minor numero possibile di forze e di coppie le quali costituiscano un sistema equivalente al dato, cioè che produca il medesimo effetto.

Incominceremo dal mostrare che un sistema di forma invariabile è in generale equivalente ad un sistema composto di una forza e di una coppia. Infatti immaginando una qualunque delle forze del sistema ed un punto arbitrario dello spazio, e supponendo che a questo punto vengano applicate due forze ciascuna di grandezza eguale alla nominata, dirette parallelamente alla medesima ed agenti per verso contrario; e che quel punto venga unito invariabilmente col punto di applicazione della forza; il sistema di quelle tre forze non produrrà che l'effetto della prima forza. Ma quel sistema può anche considerarsi come composto di una forza applicata al punto arbitrario, e di una coppia, per cui alla forza qualsivoglia del sistema dato si è sostituito una forza applicata ad un punto arbitrario ed una coppia. Se ripetiamo questa operazione per ciascuna delle forze del sistema si otterranno altrettante forze ap-

plicate ad un punto, ed un numero eguale di coppie; perciò componendo parzialmente quelle forze e quelle coppie si otterrà, in generale, una forza ed una coppia che formeranno un sistema equivalente al dato.

2.° Vediamo ora come si possano determinare gli elementi necessarj ad individuare la forza e la coppia in funzione di quelli del sistema dato. Sieno $P_1, P_2 \ldots . P_n$ le grandezze delle forze, e riferito il sistema a tre assi ortogonali si indichino con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots$ i coseni degli angoli che le loro direzioni comprendono con quegli assi; e con $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ le coordinate dei loro punti di applicazione. Finalmente indicheremo per brevità con O l'origine degli assi, e gli assi medesimi con Ox, Oy, Oz: e con P; α, β, γ; x, y, z, gli elementi per una qualsivoglia di quelle forze. Decomponiamo la forza di grandezza P in tre parallele ai tre assi; quindi (§ 1.°) sostituiamo a ciascuna delle componenti, di cui le grandezze sono $P\alpha, P\beta, P\gamma$, tre forze applicate all'origine e dirette a seconda degli assi, e tre coppie. Queste coppie hanno la proprietà di avere i loro piani passanti ordinatamente per gli assi; e precisamente il piano di quella che corrisponde alla forza di grandezza $P\alpha$ passa per l'asse Ox, e così per le altre. Consideriamo la prima di queste coppie, e rendiamo l'asse della medesima perpendicolare alla direzione delle forze, trasportando il punto di applicazione della forza di grandezza $P\alpha$ nel punto in cui la sua direzione incontra il piano yOz, cioè nel punto di coordinate y, z. Immagino questo punto connesso invariabilmente col punto che è la sua projezione sull'asse Oy, ed applicate a quest'ultimo punto due forze ciascuna di grandezza $P\alpha$, parallele all'asse Ox ed agenti per verso contrario. In questo modo possiamo sostituire alla coppia che si considera una coppia di cui il momento è $y.P\alpha$, situata nel piano xOy; ed una coppia di cui il momento è $z.P\alpha$, situata in un piano parallelo al piano zOx e che possiamo supporre trasportata in questo piano. Consideriamo che queste coppie osser-

vate nel proprio piano, l'una dall'asse delle Oz, l'altra da quello delle Oy, trovansi agire per verso contrario; per esempio, supponendo che la forza di grandezza Pα agisca pel verso secondo la quale si misurano le coordinate positive, la prima agirà da destra a sinistra, la seconda da sinistra a destra. Analogamente alla seconda coppia si potranno sostituire due altre poste nei piani yOz, xOy di cui i momenti saranno zPβ, xPβ, le quali agiranno per verso contrario; ed alla terza coppia si potranno sostituire le due di momenti xPγ, yPγ situate nei piani zOx, yOz e agenti per verso contrario. Le tre prime coppie ottenute vengono così sostituite da altre sei poste due a due nei tre piani ortogonali; le due di ciascun piano essendo manifestamente agenti per verso contrario. E queste mediante tre composizioni parziali vengono sostituite da tre, pur situate in quei tre piani, e di cui i momenti sono

$$x\mathrm{P}\beta - y\mathrm{P}\alpha,\ \ z\mathrm{P}\alpha - x\mathrm{P}\gamma,\ \ y\mathrm{P}\gamma - z\mathrm{P}\beta.$$

Ripetendo per tutte le forze del sistema quanto si è fatto per quella di grandezza P, si otterranno $3n$ forze applicate all' origine, delle quali n dirette secondo l' asse Ox, n secondo l'Oy e le altre n a seconda di Oz; e $3n$ coppie situate in numero n per ciascun piano. Componendo parte a parte quei tre gruppi di forze si otterranno tre risultanti di cui le grandezze, che indico con X, Y, Z, verranno date dalle equazioni

$$(1)\qquad \mathrm{X} = \Sigma\,\mathrm{P}\alpha,\ \ \mathrm{Y} = \Sigma\,\mathrm{P}\beta,\ \ \mathrm{Z} = \Sigma\,\mathrm{P}\gamma:$$

e componendo quei tre gruppi di coppie, si otterrano tre coppie risultanti, i momenti delle quali, che denomino con M_x, M_y, M_z, hanno per valore

$$(2)\ \mathrm{M}_x = \Sigma\,\mathrm{P}(y\gamma - z\beta),\ \ \mathrm{M}_y = \Sigma\,\mathrm{P}(z\alpha - x\gamma),\ \ \mathrm{M}_z = \Sigma\,\mathrm{P}(x\beta - y\alpha).$$

Da ultimo componendo queste tre forze e queste tre coppie si giungerà ad ottenere quella forza e quella coppia che, come si è dimostrato, ponno formare un sistema

equivalente al dato. Se con R denominasi la grandezza della forza risultante, con A, B, C i coseni degli angoli che la direzione di essa comprende cogli assi, si avranno le

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \tag{3}$$

$$A = \frac{X}{R},\ B = \frac{Y}{R},\ C = \frac{Z}{R}, \tag{4}$$

ed indicando con M il momento della coppia risultante; con H, K, L i coseni degli angoli che il piano di essa fa coi tre piani yOz, zOx, xOy, si avranno le

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 \tag{5}$$

$$H = \frac{M_x}{M},\ K = \frac{M_y}{M},\ L = \frac{M_z}{M}. \tag{6}$$

Denominando *asse* di una coppia una retta qualunque perpendicolare al piano di essa, gli assi Ox, Oy, Oz saranno ordinatamente gli assi delle coppie di momenti M_x, M_y, M_z, ed H, K, L saranno i coseni degli angoli che l'asse della coppia risultante comprende cogli assi delle coppie componenti.

3.° Un sistema di forma invariabile è anche equivalente al sistema di due forze di cui le direzioni non sono in uno stesso piano. Infatti supponiamo che il punto di applicazione della forza risultante di grandezza R venga trasportato al punto in cui la direzione di quella forza incontra il piano della coppia risultante, e quindi decomposta in due, l'una diretta nel piano di essa coppia, l'altra obliquamente al piano stesso. Componiamo ora la coppia e la forza diretta nel piano di essa, trasportando la coppia nel proprio piano in modo che la direzione di una delle forze venga a coincidere con quella della forza che si considera. Quelle due forze produrranno quindi il medesimo effetto di una sola di cui la grandezza fosse la somma o la differenza delle grandezze delle medesime, secondo che agiscono per lo stesso verso o per verso contrario.

Da ultimo componendo questa risultante, e l' altra forza della coppia, le quali sono parallele ma di grandezze disuguali, si otterrà una risultante, la quale potrà sostituirsi alla coppia risultante ed alla componente diretta nel suo piano. Quindi la forza risultante e la coppia risultante produrranno il medesimo effetto di quest' ultima risultante e della componente diretta obliquamente al piano, le direzioni delle quali forze evidentemente non si incontrano.

4.° I valori della grandezza della risultante e del momento della coppia risultante (equazioni (3), (5),) sono funzioni di quantità i valori delle quali variano al cambiare la posizione degli assi cui si riferisce il sistema di forma invariabile. Importa quindi di conoscere a quali variazioni andranno soggetti quei primi valori, supponendo riferito il sistema ad una seconda terna di assi ortogonali. Sieno x_0, y_0, z_0 le coordinate dell' origine di questi assi rispetto ai primi, ed a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; i coseni degli angoli che i nuovi assi comprendono cogli assi Ox, Oy, Oz, rispettivamente. Indico con p, q, r le coordinate del punto di applicazione della forza qualsivoglia di grandezza P relativamente ai nuovi assi, e con λ, μ, ν i coseni degli angoli che la direzione di essa comprende coi medesimi. Se con X_0, Y_0, Z_0; M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0} si rappresentano rispetto ai nuovi assi quantità analoghe alle X, Y, Z; M_x, M_y, M_z rispetto ai primi; si avranno le equazioni

$$(7) \qquad X_0 = \Sigma P\lambda, \quad Y_0 = \Sigma P\mu, \quad Z_0 = \Sigma P\nu,$$

$$(8) \quad M_{x_0} = \Sigma P(q\nu - r\mu), \quad M_{y_0} = \Sigma P(r\lambda - p\nu), \quad M_{z_0} = \Sigma P(p\mu - q\lambda).$$

Ora è noto essere:

$$p = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0),$$
$$q = a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0),$$
$$r = a_3(x - x_0) + b_3(y - y_0) + c_3(z - z_0),$$

ed anche:

$$\lambda = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3, \quad \mu = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3, \quad \nu = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3;$$

quindi sostituendo questi valori nelle (7) (8) rammentando le denominazioni (1) (2), si otterranno fra le grandezze delle forze le tre relazioni

$$(9)\quad X_0 = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z,\ Y_0 = b_1 X + b_2 Y \pm b_3 Z,\ Z_0 = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z$$

e fra i momenti delle coppie le altre tre

$$(10)\quad \begin{cases} M_{x_0} = a_1 (M_x - y_0 Z + z_0 Y) + a_2 (M_y - z_0 X + x_0 Z) \\ \qquad + a_3 (M_z - x_0 Y + y_0 X) \\ M_{y_0} = b_1 (M_x - y_0 Z + z_0 Y) + b_2 (M_y - z_0 X + x_0 Z) \\ \qquad + b_3 (M_z - x_0 Y + y_0 X) \\ M_{z_0} = c_1 (M_x - y_0 Z + z_0 Y) + c_2 (M_y - z_0 X + x_0 Z) \\ \qquad + c_3 (M_z - x_0 Y + y_0 X). \end{cases}$$

Indichiamo con R_0 la grandezza della forza risultante e con M_0 il momento della coppia risultante, supponendo il sistema riferito ai nuovi assi; sostituendo nei valori di R_0, M_0 per X_0, Y_0, Z_0 ed M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0} le espressioni superiori, si hanno le due relazioni

$$R_0^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$(11)\quad M_0^2 = (M_x - y_0 Z + z_0 Y)^2 + (M_y - z_0 X + x_0 Z)^2 + (M_z - x_0 Y + X)^2$$

La prima di queste equazioni mostra che la grandezza della forza risultante ha valore costante qualunque sia la terna d'assi ortogonali cui si riferisce il sistema, e che la grandezza di una componente qualsivoglia non può superare la grandezza della risultante, ossia che questa quantità è la misura del massimo valore che può assumere la grandezza di una componente. Dalla seconda di quelle equazioni deducesi che il valore del momento della coppia risultante cambia al variare degli assi cui si riferisce il sistema; ma siccome supponendo $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ottiensi la

$$M_0^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2,$$

ne risulta che questo momento ha un valore costante per

tutte le terne di assi ortogonali aventi origine comune, e che questo valore è anche massimo fra i valori dei momenti delle coppie componenti corrispondenti a ciascuna di quelle terne. Dunque il valore del momento della coppia risultante muta soltanto al cambiare della posizione dell' origine degli assi; e per questa proprietà ogni qualvolta dovrà riferirsi un sistema a due o più terne di assi si supporranno paralleli ciascuno a ciascuno; non influendo la loro direzione sui valori della grandezza della risultante e del momento della coppia risultante. In questa ipotesi le equazioni (9) (10) si riducono alle

$$(12)\quad \begin{cases} X_0 = X,\ Y_0 = Y,\ Z_0 = Z, \\ M_{x_0} = M_x - y_0 Z + z_0 Y, \\ M_{y_0} = M_y - z_0 X + x_0 Z, \\ M_{z_0} = M_z - x_0 Y + y_0 X. \end{cases}$$

M_0 si chiamerà momento della coppia risultante *corrispondente al punto* di cordinate x_0, y_0, z_0; ed una coppia componente di essa si dirà pure coppia componente corrispondente a quel punto.

Se le equazioni (9) (10) vengono moltiplicate fra loro ordinatamente e quindi sommate, giungesi alla

$$(13)\quad X_0 M_{x_0} + Y_0 M_{z_0} + Z_0 M_{z_0} = X M_x + Y M_y + Z M_z;$$

la quale dimostra che questo trinomio, il quale indicheremo con V, ritiene il medesimo valore qualunque sieno gli assi ai quali si riferisce il sistema.

5.° Sieno a_0, b_0, c_0 i coseni degli angoli che l'asse della coppia risultante di momento M_0 comprende cogli assi tanto della prima che della seconda terna; ed a_n, b_n, c_n i coseni degli angoli che l' asse di una coppia componente di momento N corrispondente al medesimo punto di coordinate x_0, y_0, z_0 fa con questi assi. Indicando con φ l'angolo

compreso dagli assi di quelle coppie, ed osservando alle equazioni (5) (6), si hanno le

$$(14) \qquad M_0 = a_0 M_{x_0} + b_0 M_{y_0} + c_0 M_{z_0},$$

$$(15) \qquad N = M_0 \cos. \varphi = a_n M_{x_0} + b_n M_{y_0} + c_n M_{z_0}:$$

quindi pei valori (12), se con l, m, n si rappresentano i coseni che l'asse della coppia risultante o di una coppia componente qualsivoglia corrispondenti al punto di coordinate x_0, y_0, z_0 fanno cogli assi ortogonali, la espressione

$$(16) \; lM_x + mM_y + nM_z + (y_0 n - z_0 m)X + (z_0 l - x_0 n)Y + (x_0 m - y_0 l)Z$$

equivarrà al momento di quella coppia risultante o di quella coppia componente. Ora sostituendo nella medesima per X, Y, Z ed M_x, M_y, M_z i loro valori (1) (2), si ottiene la

$$\Sigma P \left\{ (x - x_0)(\beta n - \gamma m) + (y - y_0)(\gamma l - \alpha n) + (z - z_0)(\alpha m - \beta l) \right\}$$

ossia, indicando con δ la minima distanza fra la direzione della forza di grandezza P e l'asse della coppia, e con θ l'angolo compreso da queste rette, si avrà che quella espressione equivale alla

$$\Sigma P \delta \text{ sen. } \theta.$$

Ne deriva che il momento di una coppia risultante o componente eguaglia la somma dei prodotti delle grandezze delle componenti di ciascuna forza dirette perpendicolarmente all'asse della coppia, per le corrispondenti minime distanze che le direzioni delle forze hanno da quell'asse.

CAPITOLO IV.

Della coppia risultante di momento minimo e della distribuzione degli assi delle coppie nello spazio.

1.° Il valore trovato (Cap. III, form. 11) pel momento della coppia risultante corrispondente al punto di coordinate x_0, y_0, z_0 cambia evidentemente variando il valore di queste coordinate. Possiamo quindi proporci la quistione di determinare quali debbano essere i valori delle medesime, affinchè il momento della coppia risultante corrispondente risulti minimo rispetto ai momenti di tutte le altre coppie risultanti. A ciò deriviamo la espressione (11) Cap. III parzialmente rispetto ad x_0, y_0, z_0, ed eguagliando a zero i risultati si ottengono le

$$(1) \qquad \frac{X}{M_{x_m}} = \frac{Y}{M_{y_m}} = \frac{Z}{M_{z_m}};$$

nelle quali le M_{x_m}, M_{y_m}, M_{z_m} sono i valori che acquistano le M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0} in questo caso particolare. Le equazioni superiori dimostrano la principale proprietà della coppia risultante di momento minimo; cioè che l'asse di questa coppia è parallelo alla direzione della risultante. Il coseno dell'angolo compreso da queste due rette sarà perciò eguale all'unità; ed in conseguenza, fatto

$$M_m^2 = M_{x_m}^2 + M_{y_m}^2 + M_{z_m}^2,$$

si avrà

$$\frac{X}{R} \cdot \frac{M_{x_m}}{M_m} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{M_{y_m}}{M_m} + \frac{Z}{R} \cdot \frac{M_{z_m}}{M_m} = 1;$$

Digitized by Google

dalla quale dedurremo

$$(2) \qquad M_m = \frac{V}{R}.$$

Il momento M_m si denominerà *momento minimo del sistema.*

Ora se con x_m, y_m, z_m rappresentiamo le coordinate del punto dello spazio al quale corrisponde la coppia di momento M_m, si avranno tre equazioni analoghe alle (12) Cap. III, le quali per le (1) si riducono alle

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{XV}{R^2} &= M_x - y_m Z + z_m Y, \\ \frac{YV}{R^2} &= M_y - z_m X + x_m Z, \\ \frac{ZV}{R^2} &= M_z - x_m Y + y_m X, \end{aligned}$$

ossia alle

$$(4) \qquad \frac{x_m - A}{X} = \frac{y_m - B}{Y} = \frac{z_m - C}{Z},$$

essendo

$$(5) \quad A = \frac{YM_z - ZM_y}{R^2}, \; B = \frac{ZM_x - XM_z}{R^2}, \; C = \frac{XM_y - YM_x}{R^2}.$$

Ma se nelle (4) consideriamo le x_m, y_m, z_m come coordinate correnti, le equazioni medesime rappresentano una retta ad ogni punto della quale corrisponderà una coppia risultante di momento M_m; come è evidente, essendo quella retta l'asse della coppia di momento minimo. Questa retta chiamasi *asse centrale* del sistema.

2.° Il punto di coordinate A, B, C situato sull'asse centrale, è il punto di intersezione del medesimo asse colla perpendicolare condottagli dall' origine O dei primi assi; il che provasi facilmente, essendo le equazioni di questa perpendicolare le

$$(6) \qquad \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

Digitized by Google

Ne deriva che indicando con d la distanza fra l'origine O e l'asse centrale si ha, per le (5),

$$(7) \qquad M^2 = M_m^2 + d^2 R^2$$

per cui, essendo la retta (6) perpendicolare all'asse della coppia di momento M_m ed alla direzione della risultante, la coppia risultante di momento M può considerarsi come decomponibile in due poste in piani perpendicolari fra loro ed aventi per momenti M_m, Rd; il che rendesi chiaro osservando essere questa seconda coppia quella che risulta dal trasportare il punto di applicazione della risultante dal punto dell'asse centrale di coordinate A, B, C al punto corrispondente alla coppia risultante di momento M.

Dalla (7) deduciamo: essere eguali fra loro i momenti di quelle coppie risultanti che corrispondono a punti situati sopra una medesima superficie cilindrica circolare avente per asse l'asse centrale. Inoltre, siccome, indicando con ψ l'angolo compreso dall'asse della coppia di momento M e dalla direzione della risultante, si ha

$$(8) \qquad \cos.\,\psi = \frac{V}{R.\,M} = \frac{M_m}{M};$$

ottiensi, per le (7),

$$\text{tang.}\,\psi = d\,\frac{R}{V}:$$

quindi gli assi delle coppie risultanti corrispondenti a punti situati sopra una stessa superficie cilindrica circolare sono egualmente inclinati all'asse centrale.

3.° Si è veduto che ad ogni punto dello spazio corrispondono una coppia risultante ed infinite coppie componenti; e che, considerando un punto di coordinate x_0, y_0, z_0, si ha fra il momento M_0 della coppia risultante, il momento N di una coppia componente qualsivoglia, e l'angolo φ compreso dai loro assi la relazione

$$N = M_0 \cos.\,\varphi.$$

Digitized by Google

Deducesi da essa essere eguali fra loro i momenti di quelle coppie componenti, corrispondenti ad uno stesso punto, gli assi delle quali sono generatrici di un cono retto avente per asse l'asse della coppia risultante. Quest'ultima equazione e (8) la

$$M_m = M_0 \cos. \psi \tag{9}$$

danno la seguente:

$$N = M_m \frac{\cos. \varphi}{\cos. \psi}:$$

dunque per ogni punto dello spazio esiste un numero infinito di coppie componenti di momenti eguali al momento minimo; gli assi di queste coppie sono generatrici di un cono retto avente il vertice in quel punto, per asse l'asse della coppia risultante corrispondente a quel punto, ed una generatrice qualunque fa coll'asse del cono un angolo eguale a quello che il medesimo asse fa coll'asse centrale.

4.° Considerando la coppia risultante corrispondente al punto di coordinate $x_0 \cdot y_0, z_0$, si immagini presa sull'asse della medesima partendo da quel punto una porzione di lunghezza reciprocamente proporzionale al momento di essa coppia risultante; cioè indicando con h questa distanza e con k una costante sia:

$$h = \frac{k}{M_0}.$$

Analogamente si operi sull'asse di una coppia componente qualunque di momento N corrispondente allo stesso punto; ed indicando con p, q, r le coordinate dell'estremità di questa retta, e con a_n, b_n, c_n i coseni degli angoli che essa forma coi tre assi ortogonali, si avranno le

$$p = \frac{k\, a_n}{N}, \quad q = \frac{k\, b_n}{N}, \quad r = \frac{k\, c_n}{N},$$

per le quali e per la (15) Cap. III. ottiensi

$$p \frac{M_{x_0}}{M_0} + q \frac{M_{y_0}}{M_0} + r \frac{M_{z_0}}{M_0} = h.$$

Dunque gli estremi non comuni di quelle rette che coincidono cogli assi delle coppie componenti corrispondenti ad un medesimo punto, e sono di lunghezze reciproche ai momenti di esse coppie, sono situati in un piano, il quale è perpendicolare alla retta che coincide coll'asse della coppia risultante e passa pel suo estremo non comune.

Così se da un punto dell'asse centrale immaginiamo condotte delle rette parallele agli assi delle coppie risultanti, e su quell'asse e quelle rette facciamo una costruzione analoga alla superiore: indicando con x_m, y_m, z_m, e con p, q, r le coordinate delle estremità delle porzioni prese sull'asse centrale e sull'asse della coppia risultante di momento M_0, si avrà per la (9):

$$p^2 + q^2 + r^2 = (x_m^2 + y_m^2 + z_m^2) \cos.^2 \psi ;$$

ma

$$\cos. \psi = \frac{p\, x_m + q\, y_m + r\, z_m}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}\ \sqrt{(x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)}}$$

quindi sostituendo si otterrà

$$(p - \tfrac{1}{2} x_m)^2 + (q - \tfrac{1}{2} y_m)^2 + (r - \tfrac{1}{2} z_m)^2 = p^2 ,$$

posto:

$$p = \tfrac{1}{2} \sqrt{(x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)}.$$

Ne risulta che il luogo geometrico dei termini non comuni di quelle porzioni di rette parallele agli assi delle coppie risultanti è una superficie sferica avente il centro nel punto di mezzo della retta di lunghezza reciproca al momento minimo ed il raggio eguale ad una metà della medesima lunghezza.

5.° Le proprietà dimostrate nel § antecedente forniscono una semplice costruzione mediante la quale si ottengono i momenti di tutte le coppie risultanti e componenti allorquando sia conosciuto il momento minimo del sistema. Sia AB la retta di lunghezza $2p$, e costrutta sopra di essa, come diametro, la semicirconferenza ACB, da

uno degli estremi del diametro AB, per esempio B, conducasi una corda qualsivoglia BC. Questa corda sarà di lunghezza reciprocamente proporzionale al momento di ciascuna di quelle coppie risultanti, gli assi delle quali fanno coll'asse centrale un angolo eguale al CBA. Unito il punto A col punto C, se dal punto B conducesi una retta qualunque BD fino ad incontrare la corda AC od il suo prolungamento, la lunghezza di questa retta sarà reciprocamente proporzionale al momento di ciascuna di quelle coppie componenti gli assi delle quali formano coll' asse della coppia risultante corrispondente al medesimo punto dello spazio un angolo eguale al DBC.

Digitized by Google

CAPITOLO V.

Proprietà delle coppie risultanti.

1.° Supponiamo che il piano e l'asse di una coppia risultante passino pel punto al quale corrisponde la coppia medesima; per cui il piano e l'asse della coppia corrispondente al punto di coordinate x_0, y_0, z_0 saranno rappresentati dalle equazioni

$$(x-x_0)\,M_{x_0}+(y-y_0)\,M_{y_0}+(z-z_0)\,M_{z_0}=0$$

$$\frac{x-x_0}{M_{x_0}}=\frac{y-y_0}{M_{y_0}}=\frac{z-z_0}{M_{z_0}}.$$

Ciò posto, sieno

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}$$

le equazioni di una retta qualsivoglia; si domanda quali condizioni dovranno verificare i parametri a, b.... perchè questa sia asse di coppia risultante. La coppia risultante suppongasi essere la corrispondente al punto di coordinate x_0, y_0, z_0; dovendo la retta passare per esso ed essere perpendicolare al piano dalla coppia, avranno luogo le equazioni

$$\frac{x_0-a}{\alpha}=\frac{y_0-b}{\beta}=\frac{z_0-c}{\gamma},$$

$$\frac{M_{x_0}}{\alpha}=\frac{M_{y_0}}{\beta}=\frac{M_{z_0}}{\gamma}$$

dalle quali, indicando con h, k i valori comuni ai primi ed ai secondi rapporti, si potranno dedurre i valori delle x_0, y_0, z_0; M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0}; e questi sostituiti nelle (12) del Capitolo III, danno le

$$k\alpha + h(\beta Z - \gamma Y) - (M_x - bZ + cY) = 0,$$

$$k\beta + h(\gamma X - \alpha Z) - (M_y - cX + aZ) = 0,$$

$$k\gamma + h(\alpha Y - \beta X) - (M_z - aY + bX) = 0,$$

dalle quali eliminando le h, k si ha la condizione richiesta. Per eseguire la eliminazione si moltiplichino dapprima quelle equazioni per X, Y, Z, e sommandole si ottiene

$$k = \frac{V}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z},$$

quindi moltiplicandole per α, β, γ e sommandole di nuovo giungesi alla

$$(1) \quad \alpha M_x + \beta M_y + \gamma M_z + X(b\gamma - c\beta) + Y(c\alpha - a\gamma) + Z(a\beta - b\alpha) = \frac{V(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z};$$

equazione alla quale devono sodisfare i parametri a, b, ... perchè la retta superiore sia asse di coppia risultante.

Il primo membro di questa equazione diviso per $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ è eguale al momento della coppia risultante che ha per asse la retta data ((16) del Capitolo III); indicando con M_0 questo momento, si avrà

$$M_0 \frac{V\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z} = \frac{V}{S},$$

essendo S la grandezza della componente della risultante di grandezza R, componente diretta secondo quella retta.

2.° Considerando una seconda coppia risultante corrispondente al punto di coordinate x_1, y_1, z_1, si avranno tre

equazioni analoghe alle (12) del Capitolo III dalle quali e da queste si dedurranno le

$$(3)\quad \begin{cases} M_{x_0} = M_{x_1} - (y_0 - y_1)\,Z + (z_0 - z_1)\,Y, \\ M_{y_0} = M_{y_1} - (z_0 - z_1)\,X + (x_0 - x_1)\,Z, \\ M_{z_0} = M_{z_1} - (x_0 - x_1)\,Y + (y_0 - y_1)\,X. \end{cases}$$

Moltiplicando queste equazioni per $x_0 - x_1$, $y_0 - y_1$, $z_0 - z_1$ e sommandole si ottiene:

$$(x_0 - x_1)\,M_{x_0} + (y_0 - y_1)\,M_{y_0} + (z_0 - z_1)\,M_{z_0} =$$
$$= (x_0 - x_1)\,M_{x_1} + (y_0 - y_1)\,M_{y_1} + (z_0 - z_1)\,M_{z_1}\,;$$

cioè se il punto di coordinate x_1, y_1, z_1 è situato nel piano della coppia risultante corrispondente al punto di coordinate x_0, y_0, z_0; quest'ultimo punto è situato nel piano della coppia risultante corrispondente al primo. E siccome il punto di coordinate x_1, y_1, z_1 è affatto arbitrario, avremo più generalmente che i piani delle coppie risultanti corrispondenti a punti situati in un piano di coppia risultante passano tutti per un medesimo punto; il quale è il punto a cui corrisponde quella coppia. Ma anche il punto di coordinate x_0, y_0, z_0 è arbitrario, quindi avremo la proprietà reciproca alla superiore, cioè che se i piani di un numero qualsivoglia di coppie risultanti si segano in uno stesso punto, i punti a cui corrispondono le coppie medesime sono situati nel piano della coppia risultante corrispondente a quel punto.

3.° Se indichiamo con p la distanza fra i punti di coordinate x_0, y_0, z_0 ed x_1, y_1, z_1 e con l, m, n i coseni degli angoli che la retta la quale unisce quei due punti forma coi tre assi ortogonali, dalle equazioni (3) si deducono le seguenti:

$$(4)\quad \begin{cases} M_{x_0} = M_{x_1} + \rho\,(nY - mZ), \\ M_{y_0} = M_{y_1} + \rho\,(lZ - nX), \\ M_{z_0} = M_{z_1} + \rho\,(mX - lY). \end{cases}$$

Supponiamo ora che il punto di coordinate x_0, y_0, z_0 sia situato sull' asse della coppia risultante corrispondente al punto di coordinate x_1, y_1, z_1; le l, m, n prenderanno i valori $\frac{M_{x_1}}{M_1}$, $\frac{M_{y_1}}{M_1}$, $\frac{M_{z_1}}{M_1}$, e sostituendoli nelle equazioni superiori, si otterrà, quadrandole e facendone la somma:

$$(5) \qquad M_0^2 = M_1^2 + \rho^2 R^2 \text{ sen.}^2 \theta_1$$

indicando θ_1 l' angolo compreso dall' asse della coppia di momento M_1 e dalla direzione della risultante. Ora il valore del coseno dell' angolo compreso dagli assi delle due coppie trovasi facilmente per le (4) essere $\frac{M_1}{M_0}$; quindi la retta che unisce i punti di coordinate x_0, y_0, z_0 ed x_1, y_1, z_1, non potrà essere asse tanto dell' una che dell'altra coppia risultante corrispondenti ai punti medesimi se non è $M_0 = M_1$. Ma dalla (5) si ha come conseguenza di quest'ultima equazione la sen. $\theta_1 = 0$; per cui affinchè una retta possa essere asse comune a due coppie risultanti corrispondenti a due punti di essa, dovranno i momenti di quelle coppie essere eguali, ossia quella retta essere l'asse centrale.

4.° Le equazioni

$$(6) \qquad \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu}$$

rappresentino una retta qualsivoglia, e suppongasi che il piano della coppia risultante corrispondente al punto di coordinate x_1, y_1, z_1 passi per la retta medesima; si avranno le due condizioni:

$$(7) \begin{cases} (x_0 - x_1) M_{x_1} + (y_0 - y_1) M_{y_1} + (z_0 - z_1) M_{z_1} = 0, \\ \lambda M_{x_1} + \mu M_{y_1} + \nu M_{z_1} = 0; \end{cases}$$

le quali, ritenendo le x_1, y_1, z_1 come coordinate correnti, rappresenteranno il luogo geometrico dei punti corrispon-

denti alle coppie risultanti i piani delle quali passano per una medesima retta (6). Ora ponendo:

$$(8)\quad x_0 M_x + y_0 M_y + z_0 M_z = D, \qquad \lambda M_x + \mu M_y + \nu M_z = E$$

inoltre

$$A = \nu Y - \mu Z, \qquad B = \lambda Z - \nu X, \qquad C = \mu Y - \lambda Y;$$

le equazioni (7) prendono la forma:

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 M_{x_0} + y_1 M_{y_0} + z_1 M_{z_0} = D, \\ x_1 A + y_1 B + z_1 C = E; \end{cases}$$

quindi il luogo geometrico richiesto sarà una retta.

Reciprocamente: i piani delle coppie risultanti corrispondenti a punti situati in una retta data passano per un'altra retta. Le (6) sieno le equazioni della retta data, e consideriamo la coppia risultante corrispondente al punto di coordinate x_2, y_2, z_2. Indicando con h una indeterminata si hanno le

$$x_2 = x_0 + h\lambda, \quad y_2 = y_0 + h\mu, \quad z_2 = z_0 + h\nu$$

per le quali l'equazione del piano di quella coppia risultante prende la forma

$$x M_{x_0} + y M_{y_0} + z M_{z_0} - D + h(xA + yB + zC - E) = 0.$$

Quindi i piani delle coppie risultanti corrispondenti a punti situati sulla retta (6) passano per la retta comune intersezione dei piani (9), cioè questa è la medesima alla quale si giunse superiormente.

Queste due rette per le quali ha luogo la proprietà, che una di esse contiene i punti corrispondenti alle coppie risultanti i piani delle quali passano per l'altra, vengono chiamate *rette reciproche*. Rappresentiamo colle equazioni

$$(10)\qquad \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}$$

la retta intersezione dei piani (9) ossia, la retta reciproca della (6). Essendo identicamente

Digitized by Google

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha M_{x_0} + \beta M_{y_0} + \gamma M_{z_0} = 0\,, \\ \alpha A + \beta B + \gamma C = 0\,, \end{cases}$$

si potranno ritenere:

$$\alpha = BM_{z_0} - CM_{y_0} \qquad \beta = CM_{x_0} - AM_{z_0} \qquad \gamma = AM_{y_0} - BM_{x_0}$$

i quali valori, ponendo

$$(12)\qquad L = \lambda M_{x_0} + \mu M_{y_0} + \nu M_{z_0}\,,$$

equivalgono ai seguenti:

$$(13)\quad \alpha = \lambda V - LX, \qquad \beta = \mu V - LY, \qquad \gamma = \nu V - LZ.$$

I parametri a, b, c sodisferanno inoltre le

$$aM_{x_0} + bM_{y_0} + cM_{z_0} = D\,,$$

$$aA + bB + cC = E\,;$$

dalle quali e dalle (11) si avranno le

$$M_{x_0}(c\alpha - a\gamma) + M_{y_0}(c\beta - b\gamma) = -D\gamma\,,$$

$$A(c\alpha - a\gamma) + B(c\beta - b\gamma) = -E\gamma\,,$$

e quindi:

$$b\gamma - c\beta = DA - EM_{x_0}:$$

ed analogamente:

$$c\alpha - a\gamma = DB - EM_{y_0}\,,$$

$$a\beta - b\alpha = DC - EM_{z_0}\,.$$

Ora si ottiene facilmente

$$EM_{x_0} - DA = LM_x + V(z_0\,\mu - y_0\,\nu)$$

per cui si avranno le tre relazioni

$$(14)\quad \begin{cases} b\gamma - c\beta = V(y_0\,\nu - z_0\,\mu) - LM_x\,, \\ c\alpha - a\gamma = V(z_0\,\lambda - x_0\,\nu) - LM_y\,, \\ a\beta - b\alpha = V(x_0\,\mu - y_0\,\lambda) - LM_z\,. \end{cases}$$

Se mediante i valori (13) (14) formiamo il primo membro dell' equazione (1), risulta

$$-LV = \frac{V(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z}:$$

ma moltiplicando le (13) per α, β, γ e sommandole si ha

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = V(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) - L(\alpha X + \beta Y + \gamma Z):$$

dunque l'equazione (1) prenderà la forma

$$(15) \qquad \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0;$$

od anche, osservando che le (13) moltiplicate per λ, μ, ν danno

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = V(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - L(\lambda X + \mu Y + \nu Z),$$

la seguente:

$$(16) \qquad L = \frac{V(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}{\lambda X + \mu Y + \nu Z}.$$

Le equazioni (15) (16) contengono due interessanti proprietà delle rette reciproche. La (16) essendosi dedotta dalla (1) sostituendovi i valori di α, β, γ.... è la condizione che deve verificarsi perchè la retta (10) sia asse di coppia risultante; ma la (16) per la sua forma è anche la condizione che deve essere sodisfatta dai parametri λ, μ.... perchè la retta (6) sia asse di coppia risultante; dunque se la retta data (6) sarà asse di coppia risultante lo sarà anche la sua reciproca (9). La (15) dimostra che in questo caso quelle rette sono ortogonali.

5.° Dalle equazioni (13) (14) si deducono facilmente le seguenti:

$$X = \frac{V}{L}\lambda - \frac{1}{L}\alpha, \qquad Y = \frac{V}{L}\mu - \frac{1}{L}\beta, \qquad Z = \frac{V}{L}\nu - \frac{1}{L}\gamma;$$

$$(17)\quad \begin{cases} M_x = \dfrac{V}{L}(y_0\,\nu - z_0\,\mu) - \dfrac{1}{L}(b\gamma - c\beta), \\[2ex] M_y = \dfrac{V}{L}(z_0\,\lambda - x_0\,\nu) - \dfrac{1}{L}(c\alpha - a\gamma), \\[2ex] M_z = \dfrac{V}{L}(x_0\,\mu - y_0\,\lambda) - \dfrac{1}{L}(a\beta - b\alpha). \end{cases}$$

Si sostituiscano questi valori di X, Y... nelle espressioni di M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}, e si otterranno le relazioni:

$$M_{x_1} = \frac{V}{L}\left\{(y_0 - y_1)\,\nu - (z_0 - z_1)\,\mu\right\} - \frac{1}{L}\left\{(b - y_1)\gamma - (c - z_1)\beta\right\}$$

$$M_{y_1} = \frac{V}{L}\left\{(z_0 - z_1)\,\lambda - (x_0 - x_1)\,\nu\right\} - \frac{1}{L}\left\{(c - z_1)\,\alpha - (a - x_1)\gamma\right\}$$

$$M_{z_1} = \frac{V}{L}\left\{(x_0 - x_1)\,\mu - (y_0 - y_1)\,\lambda\right\} - \frac{1}{L}\left\{(a - x_1)\,\beta - (b - y_1)\alpha\right\}$$

Ora se il punto di coordinate x, y, z è situato sulla retta (6), i primi termini dei secondi membri nelle equazioni superiori sono nulli; per cui la somma dei quadrati darebbe

$$M_1^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{L^2}\, r_1^2$$

essendo r_1 la distanza tra il punto di coordinate x_1, y_1, z_1 e la retta reciproca alla (6). E siccome, indicando con r_2 l'analoga distanza per un altro punto, si avrebbe

$$M_2^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{L^2}\, r_2^2,$$

così avremo la proporzione

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2};$$

cioè i momenti di due coppie risultanti corrispondenti a

due punti qualunque, stanno fra loro come le distanze di questi punti dalla retta reciproca a quella che unisce i punti stessi.

6.° Siano:

$$\frac{x-x_0}{\lambda_1}=\frac{y-y_0}{\mu_1}=\frac{z-z_0}{\nu_1}$$

le equazioni della perpendicolare comune a due rette reciproche (6) (10). Questa retta per la proprietà caratteristica delle rette reciproche sarà situata nel piano della coppia risultante corrispondente al punto di coordinate x_0, y_0, z_0; per cui si avrà

$$\lambda_1 M_{x_0}+\mu_1 M_{y_0}+\nu_1 M_{z_0}=0:$$

ed essendo perpendicolare alle due rette reciproche saranno

$$\lambda_1 \lambda+\mu_1 \mu+\nu_1 \nu=0 \;. \qquad \lambda_1 \alpha+\mu_1 \beta+\nu_1 \gamma=0;$$

le quali pei valori (13) danno la

$$\lambda_1 X+\mu_1 Y+\nu_1 Z=0;$$

per cui le equazioni della perpendicolare comune alle due rette reciproche risulteranno le

$$\frac{x-x_0}{YM_{z_0}-ZM_{y_0}}=\frac{y-y_0}{ZM_{x_0}-XM_{z_0}}=\frac{z-z_0}{XM_{y_0}-YM_{x_0}}.$$

Questa retta, evidentemente perpendicolare all'asse centrale, lo incontra, come si è dimostrato al Cap. IV, § 2.°

Si indichino con ω_1, ω_2, gli angoli compresi dall'asse centrale e da ciascuna delle rette reciproche, e con δ_1, δ_2, le lunghezze delle porzioni di perpendicolare comune alle due rette reciproche intercette fra l'asse centrale e le rette stesse. Si hanno evidentemente le

$$\cos.\omega_1=\frac{\lambda X+\mu Y+\nu Z}{uR} \qquad \cos.\omega_2=\frac{\alpha X+\beta Y+\gamma Z}{vR}$$

essendo

$$u = \sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)}, \qquad v = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)};$$

ossia, pei valori (13), posto per brevità

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = H,$$

si avranno le

$$(18) \qquad Ru \cos. \omega_1 = H, \qquad Rv \cos. \omega_2 = VH - LR^2;$$

dalle quali, osservando essere

$$v^2 = u^2 V^2 + L^2 R^2 - 2VLH,$$

si deducono le due

$$(19) \quad \begin{cases} Ru \text{ sen. } \omega_1 = \sqrt{(R^2 u^2 - H^2)} \\ Rv \text{ sen. } \omega_2 = -V\sqrt{(R^2 u^2 - H^2)}. \end{cases}$$

Ora indicando con δ la minima distanza fra le due rette reciproche, e con θ l'angolo compreso dalle medesime, si ha

$$\cos. \theta = \frac{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma}{uv},$$

dalla quale

$$uv \text{ sen. } \theta = -L\sqrt{(R^2 u^2 - H^2)}:$$

e siccome sostituendo nella (12) per X, M_x... i valori (17) si ha:

$$L^2 = -\delta uv \text{ sen. } \theta,$$

si otterrà infine

$$\frac{L}{\delta} = \sqrt{(R^2 u^2 - H^2)}.$$

Per questa relazione le (19) diventano

$$(20) \quad Ru \text{ sen. } \omega_1 = \frac{L}{\delta}, \qquad Rv \text{ sen. } \omega_2 = -\frac{VL}{\delta}.$$

Finalmente la espressione della minima distanza fra la

retta (6) e l'asse centrale conduce dopo alcune riduzioni alla

$$\delta_1 u \, R \text{ sen. } \omega_1 = L - \frac{V}{R^2} H ,$$

o per la prima delle (20)

$$(21) \qquad \delta_1 = \delta \left(1 - \frac{VH}{LR^2}\right);$$

ed in conseguenza

$$(22) \qquad \delta_2 = \frac{VH}{LR^2} .$$

7.° Osservando alla forma delle equazioni (17) è evidente che se immaginiamo due forze dirette secondo le due rette reciproche (6) (10), e di cui le grandezze, indicate da R_1, R_2, sieno

$$(23) \qquad R_1 = \frac{Vu}{L}, \qquad R_2 = -\frac{v}{L},$$

i secondi membri delle prime tre rappresentano le somme delle grandezze delle componenti di quelle forze parallele agli assi ortogonali; ed i secondi membri delle altre rappresentano le somme dei momenti delle coppie componenti, quali risultano dalle leggi per la composizione dei sistemi di forma invariabile. Quindi le due forze suddette costituiscono quel sistema di due forze che al Cap. III § 3.° si è dimostrato essere equivalente al sistema dato. E ciò può anche dedursi dalle formole del paragrafo antecedente. Infatti per le (23) e le (18) (20) si hanno le

$$R_1 \cos. \omega_1 = \frac{HV}{LR}, \qquad R_2 \cos. \omega_2 = \frac{LR^2 - HV}{LR},$$

$$R_1 \text{ sen. } \omega_1 = R_2 \text{ sen. } \omega_2 = \frac{V}{\delta R},$$

dalle quali:

$$(24) \qquad \begin{cases} R_1 \cos. \omega_1 + R_2 \cos. \omega_2 = R \\ R_1 \text{ sen. } \omega_1 - R_2 \text{ sen. } \omega_2 = 0 \end{cases}$$

Digitized by Google

e per le (21) (22):

$$(25)\qquad \begin{cases} \delta_1 R_1 \cos.\omega_1 - \delta_2 R_2 \cos.\omega_2 = 0 \\ \delta_1 R_1 \operatorname{sen.}\omega_1 + \delta_2 R_2 \operatorname{sen.}\omega_2 = \dfrac{V}{R} \end{cases};$$

ora immaginando assunto come origine di tre assi ortogonali il punto in cui la minima distanza fra le due rette reciproche, direzioni delle due forze, incontra l'asse centrale, e supponendo uno degli assi coincidere coll'asse centrale ed un secondo con quella perpendicolare comune; operando la composizione delle due forze di grandezze R_1, R_2 si otterrà per le (24) una forza risultante diretta secondo l'asse centrale di cui la grandezza è R. Inoltre risulteranno due coppie, l'una posta in un piano passante per l'asse centrale e perpendicolare alla minima distanza fra le rette reciproche, il momento della quale è rappresentato dal primo membro della prima delle equazioni (25) e quindi è nullo; la seconda posta in un piano perpendicolare all'asse centrale e di cui il momento dato dalla seconda delle (25) è eguale a $\frac{V}{R}$, nota espressione del momento minimo del sistema; il che prova l'equivalenza del sistema dato e di quello delle forze di grandezza R_1, R_2, dirette secondo le due rette reciproche.

Digitized by Google

CAPITOLO VI.

Relazioni fra i momenti delle coppie risultanti e componenti.

1.° Siano M_1, M_2, M_3 i momenti di tre coppie risultanti corrispondenti rispettivamente ai punti di coordinate x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3: e si indichino con ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}, gli angoli che gli assi di quelle coppie comprendono fra loro. Se dalle tre equazioni:

$$XM_{x_1} + YM_{y_1} + ZM_{z_1} = V, \qquad XM_{x_2} + YM_{y_2} + ZM_{z_2} = V,$$
$$XM_{x_3} + YM_{y_3} + ZM_{z_3} = V$$

si deducono i valori di X, Y, Z, si hanno le

$$X = \frac{V}{\Delta}\left\{\frac{d\Delta}{dM_{x_1}} + \frac{d\Delta}{dM_{x_2}} + \frac{d\Delta}{dM_{x_3}}\right\},$$

$$Y = \frac{V}{\Delta}\left\{\frac{d\Delta}{dM_{y_1}} + \frac{d\Delta}{dM_{y_2}} + \frac{d\Delta}{dM_{y_3}}\right\},$$

$$Z = \frac{V}{\Delta}\left\{\frac{d\Delta}{dM_{z_1}} + \frac{d\Delta}{dM_{z_2}} + \frac{d\Delta}{dM_{z_3}}\right\},$$

avendo posto

$$\Delta = \begin{Bmatrix} M_{x_1} & M_{y_1} & M_{z_1} \\ M_{x_2} & M_{y_2} & M_{z_2} \\ M_{x_3} & M_{y_3} & M_{z_3} \end{Bmatrix}.$$

Le equazioni superiori sommate e quadrate danno:

$$(1)\quad \frac{1}{M_m^2} = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{M_1^2 M_2^2 \operatorname{sen.}^2 \omega_{12} + M_1^2 M_3^2 \operatorname{sen.}^2 \omega_{13} + M_2^2 M_3^2 \operatorname{sen.}^2 \omega_{23} +$$
$$+ 2 M_1 M_2 M_3^2 n + 2 M_1 M_2^2 M_3 m + 2 M_1^2 M_2 M_3 l\Big\}$$

essendo

$$(2)\left\{\begin{array}{l} l = \cos.\,\omega_{12}\cos.\,\omega_{13} - \cos.\,\omega_{23}, \quad m = \cos.\,\omega_{12}\cos.\,\omega_{23} - \cos.\,\omega_{13}, \\ \qquad n = \cos.\,\omega_{13}\cos.\,\omega_{23} - \cos.\,\omega_{12} \end{array}\right.$$

e

$$\Delta = M_1 M_2 M_3 \sqrt{\{1 - \cos.^2\omega_{12} - \cos.^2\omega_{13} - \cos.^2\omega_{23} + \\ + 2\cos.\,\omega_{12}\cos.\,\omega_{13}\cos.\,\omega_{23}\}}.$$

Quindi allorquando siano noti i momenti di tre coppie risultanti e gli angoli che i loro assi comprendono, per mezzo della formola (1) si otterrà il valore del momento minimo del sistema. Da questa formola deducesi anche la

$$(3) \qquad R^2 = \frac{1}{H^2}\left\{R_1^2\,\text{sen.}^2\,\omega_{23} + R_2^2\,\text{sen.}^2\,\omega_{13} + R_3^2\,\text{sen.}^2\,\omega_{12} + \right. \\ \left. + 2R_1R_2\,n + 2R_1R_3\,m + 2R_2R_3\,l\right\},$$

nella quale

$$H = \sqrt{\{1 - \cos.^2\omega_{12} - \cos.^2\omega_{13} - \cos.^2\omega_{23} + \\ + 2\cos.\,\omega_{12}\cos.\,\omega_{13}\cos.\,\omega_{23}\}}$$

ed R_1, R_2, R_3 rappresentano le grandezze delle componenti della forza di grandezza R diretta secondo tre rette comprendenti fra loro gli angoli ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}. Notiamo che le formole (1) (3) sono insussistenti allorquando le tre rette sieno parallele ad uno stesso piano, perchè in questo caso $H = 0$.

2.° Sieno N_1, N_2, N_3 i momenti di tre coppie componenti corrispondenti al punto di coordinate x_0, y_0, z_0; ed α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 i coseni degli angoli che gli assi di quelle coppie comprendono cogli assi ortogonali; si avranno le equazioni, Cap. III, § 5.°,

$$N_1 = \alpha_1 M_{x_0} + \beta_1 M_{y_0} + \gamma_1 M_{z_0},$$
$$N_2 = \alpha_2 M_{x_0} + \beta_2 M_{y_0} + \gamma_2 M_{z_0},$$
$$N_3 = \alpha_3 M_{x_0} + \beta_3 M_{y_0} + \gamma_3 M_{z_0},$$

Digitized by Google

dalle quali deducendo i valori di M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0}, formandone i quadrati, e sommandoli, si ottiene

$$(5) \qquad M_0^2 = \frac{1}{H^2}\Big\{N_1^2 \operatorname{sen.}^2 \omega_{23} + N_2^2 \operatorname{sen.}^2 \omega_{13} + N_3^2 \operatorname{sen.}^2 \omega_{12} + \\ + 2 N_1 N_2 n + 2 N_1 N_3 m + 2 N_2 N_3 l\Big\},$$

nella quale le II. l, m, n hanno i valori superiori, e le ω_{12}, ω_{13}, ω_{23} sono gli angoli compresi dagli assi delle coppie componenti. Mediante questa formola (5) il momento di una coppia risultante corrispondente ad un punto si potrà determinare in funzione dei momenti di tre coppie componenti corrispondenti allo stesso punto e degli angoli compresi dagli assi delle medesime.

3.° Rammentando la espressione (16) del Cap. III è evidente che, posto

$$(6) \qquad L_r = a_r M_x + b_r M_y + c_r M_z + \lambda_r X + \mu_r Y + \nu_r Z,$$

$$\lambda_r = \eta_r c_r - \zeta_r b_r, \qquad \mu_r = \zeta_r a_r - \xi_r c_r, \qquad \nu_r = \xi_r b_r - \eta_r a_r;$$

sarà L_r il momento della coppia risultante o delle coppie componenti corrispondenti al punto di coordinate ξ_r, η_r, ζ_r, l'asse della quale comprende coi tre assi ortogonali angoli di cui i coseni sono a_r, b_r, c_r.

Fatto $r = 1, 2, 3 \ldots n$ nella equazione superiore (6), si moltiplichino le risultanti per le indeterminate $A_1, A_2, \ldots A_n$ e si sommino, supponendo

$$(7) \qquad \begin{cases} \Sigma A a = 0 & \Sigma A b = 0 & \Sigma A c = 0 \\ \Sigma A \lambda = 0 & \Sigma A \mu = 0 & \Sigma A \nu = 0: \end{cases}$$

si avrà

$$(8) \qquad A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots\ldots + A_n L_n = 0.$$

Gli elementi che individuano gli assi delle coppie di cui i momenti sodisfanno la (8) devono verificare le equazioni (7) indipendentemente da valori particolari attribuibili alle A_1, $A_2 \ldots$ Ora dalle equazioni (7) possiamo de-

Digitized by Google

durre una proprietà generale sussistente pei medesimi assi qualunque ne sia il numero; cioè che una retta la quale incontra $n-1$ di quegli assi deve incontrare anche l'ennesimo. Infatti supponiamo che la retta:

$$\frac{x-l}{\alpha}=\frac{y-m}{\beta}=\frac{z-n}{\gamma}$$

incontri le rette 1.ª, 2.ª, ... $(n-1)$; si avrà

$$a_r(m\gamma-n\beta)+b_r(n\alpha-l\gamma)+c_r(l\beta-m\alpha)+\alpha\lambda_r+\beta\mu_r+\gamma\nu_r=0$$

per $r=1, 2 \ldots n-1$. Ma se si moltiplicano le (7) ordinatamente per

$$m\gamma-n\beta, \quad n\alpha-l\gamma, \quad l\beta-m\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma,$$

avendo di mira le $n-1$ equazioni superiori, si ottiene evidentemente:

$$a_n(m\gamma-n\beta)+b_n(n\alpha-l\gamma)+c_n(l\beta-n\alpha)+\alpha\lambda_n+\beta\mu_n+\gamma\nu_n=0$$

ossia la retta incontra anche l'asse dell' ennesima coppia.

4.° Considerando tre sole coppie, la eliminazione delle A_1, A_2, A_3 dalle (7) conduce a quattro equazioni indipendenti fra loro, le quali forniscono le condizioni necessarie e sufficenti per la sussistenza della (8). Eliminando le A_1, A_2, A_3 dalle prime tre equazioni (7), si ha la prima condizione:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

la quale equivale al dover essere gli assi delle tre coppie paralleli ad uno stesso piano. Una seconda equazione risulta dall'eliminare le A_1, A_2, A_3 dalla seconda, terza e quarta delle (7), ed è la:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}=0$$

ossia sviluppando il determinante, dopo aver aggiunto agli elementi dell'ultima linea del medesimo quelli della prima moltiplicati per ζ_1 e quelli della seconda moltiplicati per $-\eta_1$, la seguente:

$$\frac{(\eta_1-\eta_2)c_2-(\zeta_1-\zeta_2)b_2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{(\eta_3-\eta_1)c_3-(\zeta_3-\zeta_1)b_3}{b_3c_1-b_1c_3};$$

ed analogamente eliminando le $A_1\ldots$ dalla prima, terza e quinta, e dalla prima, seconda e sesta, si ottengono le altre due:

$$\frac{(\zeta_1-\zeta_2)a_2-(\xi_1-\xi_2)c_2}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{(\zeta_3-\zeta_1)a_3-(\xi_3-\xi_1)c_3}{c_3a_1-c_1a_3},$$

$$\frac{(\xi_1-\xi_2)b_2-(\eta_1-\eta_2)a_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{(\xi_3-\xi_1)b_3-(\eta_3-\eta_1)a_3}{a_3b_1-a_1b_3}.$$

Queste equazioni saranno evidentemente soddisfatte se le tre rette si segano in uno stesso punto; quindi i momenti di tre coppie sodisferanno l'equazione (8) se gli assi delle medesime sono situati in un piano e si segano in uno stesso punto.

Mediante le prime tre equazioni (7) si ponno determinare i rapporti fra i valori di A_1, A_2, A_3, e si ha facilmente

$$\frac{A_1}{\text{sen. }\omega_{23}}=\frac{A_2}{\text{sen. }\omega_{13}}=\frac{A_3}{\text{sen. }\omega_{12}},$$

per cui l'equazione (7) diventa

$$L_1\,\text{sen. }\omega_{23}+L_2\,\text{sen. }\omega_{13}+L_3\,\text{sen. }\omega_{12}=0.$$

5.° Nelle formole (7) (8) supponiamo $n=4$; le equazioni (7) forniranno tre sole equazioni indipendenti. Infatti dalle prime tre si hanno le proporzioni

$$A_1:A_2:A_3:A_4=\frac{d\Delta}{dh_1}:\frac{d\Delta}{dh_2}:\frac{d\Delta}{dh_3}:\frac{d\Delta}{dh_4}$$

Digitized by Google

essendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ h_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

ed h_1, h_2, h_3, h_4 quattro indeterminate; e per esse le altre tre diventano:

$$\Sigma \frac{d\Delta}{dh} \lambda = 0, \qquad \Sigma \frac{d\Delta}{dh} \mu = 0, \qquad \Sigma \frac{d\Delta}{dh} \nu = 0$$

le quali sono le equazioni che risulterebbero scrivendo la proprietà che tutte le rette che incontrano tre assi seghino anche il quarto.

Osserviamo che indicando con V il volume di una piramide triangolare le facce della quale sono rispettivamente perpendicolari agli assi delle coppie, e con a, b, c, d le aree rispettive di esse facce, si hanno le

$$V^2 = \frac{2}{9} b\,c\,d \frac{d\Delta}{dh_1} = \frac{2}{9} a\,c\,d \frac{d\Delta}{dh_2} = \frac{2}{9} a\,b\,d \frac{d\Delta}{dh_3} = \frac{2}{9} a\,b\,c \frac{d\Delta}{dh_4}$$

quindi alla (8) in questo caso si può dare la forma:

$$a\,L_1 + b\,L_2 + c\,L_3 + d\,L_4 = 0.$$

6.° Sia $n = 5$, pel teorema generale del § 3.° tutte le rette che incontrano quattro assi devono segare anche il quinto. Ora è noto che in generale esistono due sole rette che ne incontrano altre quattro; per cui l'asse della quinta coppia dovrà passare per queste due rette. Le due equazioni indipendenti che si otterrebbero mediante la eliminazione delle A_1, A_2... dalle (7) conterrebbero appunto questa proprietà. È quindi manifesto che ad ogni punto dello spazio corrisponderà una sola retta la quale possa essere asse della quinta coppia.

Se supponiamo $n = 6$, essendovi in generale una sola

retta che possa segarne altre cinque, l' asse della sesta coppia dovrà incontrare quella retta, per il che ad un punto dello spazio corrisponderanno molte rette le quali potranno essere assi della sesta coppia, ma queste rette saranno tutte situate in un piano.

Da ultimo supponendo $n = 7$ ed eliminando le M_x, M_y... si ottiene la

$$\begin{vmatrix} L_1 & a_1 & b_1 & c_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ L_2 & a_2 & b_2 & c_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ L_7 & a_7 & b_7 & c_7 & \lambda_7 & \mu_7 & \nu_7 \end{vmatrix} = 0$$

la quale relazione si può rendere indipendente della posizione degli assi nel modo seguente. Indicando con H il determinante superiore si ha

$$H = \begin{vmatrix} 0 & L_1 & a_1 \ldots . \nu_1 \\ 0 & L_2 & a_2 \ldots . \nu_2 \\ . & . & . \ldots . . \\ 0 & L_7 & a_7 \ldots . \nu_7 \\ 1 & 0 & 0 \ldots . 0 \end{vmatrix}$$

ed anche

$$H = \begin{vmatrix} L_1 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ L_2 & 0 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ L_7 & 0 & \lambda_7 & \mu_7 & \nu_7 & a_7 & b_7 & c_7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e moltiplicando fra loro queste due forme dello stesso determinante si giunge facilmente alla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots . & a_{17} & L_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots . & a_{27} & L_2 \\ . & . \ldots . & . & . \\ a_{71} & a_{72} \ldots . & a_{77} & L_7 \\ L_1 & L_2 \ldots . & L_7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

essendo $a_{rs} = \delta_{rs}$ sen. ω_{rs}, e δ_{rs} la minima distanza fra gli assi delle coppie erresima ed essesima, ω_{rs} l' angolo compreso da questi assi; per cui $a_{11} = a_{22} = \ldots . = a_{77} = 0$.

CAPITOLO VII.

Dei sistemi di forma invariabile riducibili ad una risultante, e del centro delle forze.

1.° Un sistema di forma invariabile si dice riducibile ad una sola risultante, quando si possa individuare una forza l'effetto della quale sia identico a quello del sistema. Ora rammentando che, in generale, un sistema di forma invariabile può ridursi ad una forza e ad una coppia, e che il momento di questa cambia di valore, mutando l'origine degli assi a cui riferiamo il sistema, talchè può determinarsi la coppia di momento minimo, è chiaro che pei sistemi riducibili alla sola risultante dovrà essere nullo almeno il momento della coppia risultante corrispondente ad un punto, e perciò necessariamente essere nullo il momento minimo del sistema. Per le equazioni (2) del Cap. IV si avranno quindi quali condizioni necessarie e sufficienti perchè un sistema di forma invariabile sia riducibile ad una sola risultante, le due seguenti:

$$(1) \qquad V = 0 \qquad R > 0\,;$$

e dalle (9) del medesimo Capitolo deduciamo che le altre coppie risultanti o hanno nulli i loro momenti, oppure hanno i loro assi perpendicolari alla direzione della risultante unica. Osservando poi che le equazioni (3) del Capitolo suddetto, le quali sono quelle dell'asse centrale, rappresentano anche la direzione della risultante; è evidente che nel caso dei sistemi riducibili ad una sola risultante le equazioni della direzione della medesima saranno le:

$$M_x - yZ + zY = 0, \quad M_y - zX + xZ = 0, \quad M_z - xY + yX = 0$$

od anche le:

$$\frac{x-A}{X}=\frac{y-B}{Y}=\frac{z-C}{Z},$$

avendo le A, B, C i valori (5) del Cap. IV.

2.° Se consideriamo un secondo sistema di forma invariabile, ed indichiamo con lettere accentate le quantità analoghe alle superiori relative ad esso, si avranno quali condizioni perchè il sistema sia riducibile ad una risultante le due seguenti:

$$(2) \qquad V_1=0 \qquad R_1>0$$

e quali equazioni della direzione di essa le:

$$\frac{x-A_1}{X_1}=\frac{y-A_1}{Y_1}=\frac{z-C_1}{Z_1}.$$

Osserviamo che per le equazioni (1) (2) si hanno le

$$BZ-CY=M_x, \qquad CX-AZ=M_y, \qquad AY-BX=M_z$$

ed analoghe; quindi la condizione perchè le direzioni delle risultanti dei due sistemi si incontrino sarà la

$$(3) \quad X_1 M_x + Y_1 M_y + Z_1 M_z + XM_{x_1} + YM_{y_1} + ZM_{z_1} = 0.$$

Supponiamo ora che il secondo sistema non sia qualunque, ma risulti dal far ruotare le direzioni delle forze del primo intorno ai loro punti di applicazione conservando costanti le mutue inclinazioni delle direzioni medesime. Per individuare le relazioni esistenti fra il sistema dato ed il sistema che deducesi da esso nel modo suddetto e che denomineremo *sistema variato*, si immagini una nuova terna di assi ortogonali avente origine comune colla prima, e di cui gli assi sieno talmente diretti che gli angoli compresi dalle direzioni delle forze del sistema variato con ciascuno di essi, sieno rispettivamente eguali agli angoli che le direzioni delle forze del sistema dato formano con ciascuno degli assi della prima terna. Si indichino con a_1, b_1, c_1;

a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3, i coseni degli angoli che gli assi della prima terna fanno con ciascuno degli assi della seconda, e riferendo il sistema variato alla prima terna si hanno facilmente le:

$$(4)\quad X_1 = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z, \qquad Y_1 = b_1 X + b_2 Y + b_3 Z,$$
$$Z_1 = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z;$$

$$M_x = \Sigma P\{y(c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma) - z(b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)\},$$
$$M_y = \Sigma P\{x(a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) - x(c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma)\},$$
$$M_z = \Sigma P\{z(b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma) - y(a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma)\},$$

nelle quali le P, α, β... hanno i valori del Cap. III. Queste tre ultime equazioni, ponendo per brevità

$$(5)\quad \begin{cases} E_1 = \Sigma P x\alpha & E_2 = \Sigma P x\beta & E_3 = \Sigma P x\gamma \\ F_1 = \Sigma P y\alpha & F_2 = \Sigma P y\beta & F_3 = \Sigma P y\gamma \\ G_1 = \Sigma P z\alpha & G_2 = \Sigma P z\beta & G_3 = \Sigma P z\gamma \end{cases}$$

si trasformano nelle

$$(6)\quad \begin{cases} M_{x_1} = c_1 F_1 - b_1 G_1 + c_2 F_2 - b_2 G_2 + c_3 F_3 - b_3 G_3, \\ M_{y_1} = a_1 G_1 - c_1 E_1 + a_2 G_2 - c_2 E_2 + a_3 G_3 - c_3 E_3, \\ M_{z_1} = b_1 E_1 - a_1 F_1 + b_2 E_2 - a_2 F_2 + b_3 E_3 - a_3 F_3, \end{cases}$$

le quali moltiplicate ordinatamente per a_1, b_1, c_1, quindi per a_2, b_2, c_2, e da ultimo per a_3, b_3, c_3, danno le seguenti:

$$a_1 M_{x_1} + b_1 M_{y_1} + c_1 M_{z_1} = a_2 E_3 + b_2 F_3 + c_2 G_3 - a_3 E_2 - b_3 F_2 - c_3 G_2$$
$$a_2 M_{x_1} + b_2 M_{y_1} + c_2 M_{z_1} = a_3 E_1 + b_3 F_1 + c_3 G_1 - a_1 E_3 - b_1 F_3 - c_1 G_3$$
$$a_3 M_{x_1} + b_3 M_{y_1} + c_3 M_{z_1} = a_1 E_2 + b_1 F_2 + c_1 G_2 - a_2 E_1 - b_2 F_1 - c_2 G_1.$$

Se queste equazioni si moltiplicano per X, Y, Z, e si sommano avendo riguardo alle equazioni (4), la condizione $V_1 = 0$ assume la forma:

$$(7)\quad L_1 a_1 + M_1 b_1 + N_1 c_1 + L_2 a_2 + M_2 b_2 + N_2 c_2 + L_3 a_3 + M_3 b_3 + N_3 c_3 = 0.$$

Digitized by Google

nella quale si ritengono essere:

$$L_1 = E_2 Z - E_3 Y \qquad L_2 = E_3 X - E_1 Z \qquad L_3 = E_1 Y - E_2 X$$
$$M_1 = F_2 Z - F_3 Y \qquad M_2 = F_3 X - F_1 Z \qquad M_3 = F_1 Y - F_2 X$$
$$N_1 = G_2 Z - G_3 Y \qquad N_2 = G_3 X - G_1 Z \qquad N_3 = G_1 Y - G_2 X.$$

Inoltre osservando che pei valori (5) si hanno le

$$M_x = F_3 - G_2, \qquad M_y = G_1 - E_3, \qquad M_z = E_2 - F_1,$$

risulta:

$$V = L_1 + M_2 + N_3 = 0$$

e la equazione (3) per le (4) (6) e per la superiore riducesi alla:

$$(8)\quad L_1 a_1 + L_2 b_1 + L_3 c_1 + M_1 a_2 + M_2 b_2 + M_3 c_2 + N_1 a_3 + N_2 b_3 + N_3 c_3 = 0.$$

È chiaro che allorquando le equazioni (7) (8) saranno sodisfatte indipendentemente da valori particolari che si potessero attribuire ai coseni a_1, b_1 ..., un sistema variato qualunque potrà ridursi ad una sola risultante, e le direzioni di tutte quelle risultanti si incontreranno in un sol punto. Ora quei nove coseni essendo legati da sei equazioni si potranno esprimere in funzione di tre quantità arbitrarie, e siccome sostituendo questi valori nelle (7) (8) le equazioni che ne risultano devono sussistere qualunque sieno queste quantità arbitrarie; le equazioni medesime si decomporranno in altre più semplici composte di soli elementi del sistema dato, le quali daranno i criterii affinchè 1.° un sistema variato qualsivoglia sia riducibile ad una sola risultante; 2.° le direzioni delle risultanti del sistema dato e dei sistemi variati passino per uno stesso punto. Se con λ, μ, ν, si indicano le tre quantità arbitrarie, i nove coseni si ponno esprimere mediante le medesime come segue: (Vedi la Nota)

$$h a_1 = 1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 \qquad h b_1 = 2(\lambda\mu + \nu) \qquad h c_1 = 2(\lambda\nu - \mu)$$
$$h a_2 = 2(\lambda\mu - \nu) \qquad h b_2 = 1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 \qquad h c_2 = 2(\mu\nu + \lambda)$$
$$h a_3 = 2(\lambda\nu + \mu) \qquad h b_3 = 2(\mu\nu - \lambda) \qquad h c_3 = 1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2$$

essendo $h = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$. La equazione (7) per questi valori e per la:

$$L_1 + M_2 + N_3 = 0$$

riducesi alla:

$$(9) \begin{cases} L_1\lambda^2 + M_2\mu^2 + N_3\nu^2 + (M_1 + L_2)\lambda\mu + (L_3 + N_1)\nu\lambda + \\ N_2 + M_3)\mu\nu + (N_2 - M_3)\lambda + (L_3 - N_1)\mu + (M_1 - L_2)\nu = 0 \end{cases}$$

la quale per l'arbitrarietà delle λ, μ, ν, decomponesi nelle:

$$L_1 = L_2 = L_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = M_3 = 0, \quad N_1 = N_2 = N_3 = 0,$$

che equivalgono alle sei:

$$(10) \quad \frac{E_1}{X} = \frac{E_2}{Y} = \frac{E_3}{Z}, \quad \frac{F_1}{X} = \frac{F_2}{Y} = \frac{F_3}{Z}, \quad \frac{G_1}{X} = \frac{G_2}{Y} = \frac{G_3}{Z} \text{ (*)}.$$

Queste sono quindi le condizioni necessarie e sufficienti perchè un sistema variato qualsivoglia sia riducibile ad una risultante unica; ma allorquando queste sono soddisfatte lo è evidentemente anche la (8); dunque dato un sistema di forma invariabile riducibile ad una sola risultante, se ciascun dei sistemi variati i quali ottengonsi dal dato nel modo esposto, sarà riducibile ad una sola risultante, le direzioni di tutte queste risultanti si incontreranno in uno stesso punto, il quale verrà denominato *centro delle forze*. Le equazioni (10) saranno perciò le condizioni che debbono verificarsi, perchè un sistema di forma invariabile ammetta centro di forze.

Se con u, v, w indichiamo i valori dei rapporti (10), le equazioni (6) in cause delle (4) si ponno scrivere nel modo seguente:

$$M_{x_1} - vZ_1 + wY_1 = 0, \qquad M_{y_1} - wX_1 + uZ_1 = 0,$$
$$M_{z_1} - uY_1 + vX_1 = 0,$$

le quali dimostrano che le u, v, w, soddisfano alle equazioni

(*) Notiamo che se i sistemi variati non fossero ciascuno riducibile ad una sola risultante, queste sarebbero le condizioni per l'eguaglianza dei momenti minimi dei sistemi medesimi.

della direzione della risultante di un sistema variato qualunque cioè le:

$$(11)\quad u=\frac{E_1}{X}=\frac{E_2}{Y}=\frac{E_3}{Z},\quad v=\frac{F_1}{X}=\frac{F_2}{Y}=\frac{F_3}{Z},\quad w=\frac{G_1}{X}=\frac{G_2}{Y}=\frac{G_3}{Z}$$

sono le coordinate del centro delle forze.

Supponiamo che il sistema dato sia di forze parallele, evidentemente tutti i sistemi variati saranno pure di forze parallele, ed essendo in questo caso (equaz. (5)):

$$E_1=\alpha\,\Sigma P x,\qquad E_2=\beta\,\Sigma P x,\qquad E_3=\gamma\,\Sigma P x,\ \text{ecc.}$$

ed:

$$X=\alpha\,\Sigma P,\qquad Y=\beta\,\Sigma P,\qquad Z=\gamma\,\Sigma P,$$

le equazioni di condizione (10) sono soddisfatte; quindi un sistema di forze parallele è riducibile a risultante unica quando sia $R>0$, ed ha centro di forze di cui le coordinate sono:

$$(12)\qquad u=\frac{\Sigma P x}{\Sigma P}.\qquad v=\frac{\Sigma P y}{\Sigma P},\qquad w=\frac{\Sigma P z}{\Sigma P}.$$

3.° Considerando la forma dei valori trovati per le coordinate del centro di un sistema di forze parallele, è chiaro che le espressioni:

$$\frac{E_1}{X},\qquad \frac{F_1}{X},\qquad \frac{G_1}{X}$$

sono le coordinate del centro del sistema di forze parallele formato dalle componenti delle forze del sistema dato dirette parallelamente ad uno degli assi. Osservando alle (11) si avrà quindi che un sistema di forma invariabile ammette centro di forze, quando i centri dei tre sistemi di forze parallele, i quali si ottengono decomponendo il sistema dato parallelamente a tre assi ortogonali, coincidono ed il punto di coincidenza è il centro del sistema dato. E nello stesso centro delle forze coincidono anche i centri di tutti i sistemi di forze parallele formati da com-

ponenti, delle forze del sistema dato, parallele a rette qualsivogliano. Infatti indicando con ω il coseno dell'angolo che la direzione della forza P comprende con una retta arbitraria, le coordinate del centro del sistema di componenti parallele a quella retta sono:

$$l = \frac{\Sigma P \omega x}{\Sigma P \omega}, \qquad m = \frac{\Sigma P \omega y}{\Sigma P \omega}, \qquad n = \frac{\Sigma P \omega z}{\Sigma P \omega},$$

le quali, denominando a, b, c, i coseni degli angoli che la retta fa coi tre assi, danno le:

$$a(lX - E_1) + b(lY - E_2) + c(lZ - E_3) = 0$$
$$a(mX - F_1) + b(mY - F_2) + c(mZ - F_3) = 0$$
$$a(nX - G_1) + b(nY - G_2) + c(nZ - G_3) = 0$$

od eliminando le a, b, c:

$$\begin{vmatrix} l & \frac{E_1}{X} & \frac{E_2}{Y} & \frac{E_3}{Z} \\ m & \frac{F_1}{X} & \frac{F_2}{Y} & \frac{F_3}{Z} \\ n & \frac{G_1}{X} & \frac{G_2}{Y} & \frac{G_3}{Z} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se le l, m, n si suppongono variabili, questa equazione rappresenta il piano che passa pei tre punti di cui le coordinate sono $\frac{E_1}{X}$, $\frac{F_1}{X}$, $\frac{G_1}{X}$, ecc., quindi il luogo geometrico dei centri degli infiniti sistemi di forze parallele che si ottengono nel modo suddetto è un piano. Se le equazioni (10) sono soddisfatte, tutti questi centri coincidono evidentemente col centro delle forze.

5.° I sistemi variati che abbiamo considerati superiormente non erano soggetti ad altra condizione che a quella del conservarsi costante la mutua inclinazione delle forze e le

equazioni (10) sono in questo caso le condizioni per la sussistenza del centro delle forze. Ma se assumiamo qualche altra ipotesi intorno al modo nel quale le direzioni delle forze ruotano intorno ai loro punti di applicazione, verranno evidentemente a cambiarsi le condizioni per la esistenza del centro delle forze; il quale denomineremo centro *relativo* delle forze. Supponiamo che i sistemi variati si ottengano facendo ruotare le direzioni delle forze del sistema dato intorno a rette condotte pei punti di applicazione e parallele fra loro, in modo che le mutue inclinazioni delle direzioni delle forze rimangano costanti. Operando come al § 2.° si otterranno le equazioni (7) (8) ossia pei valori di a_1, b_1.... la (9) e la:

$$(13)\quad \begin{cases} L_1\lambda^2 + M_2\mu^2 + N_3\nu^2 + (L_2 + M_1)\lambda\mu + (N_1 + L_3)\lambda\nu + \\ (M_3 + N_2)\mu\nu + (M_3 - N_2)\lambda + (N_1 - L_3)\mu + (L_2 - M_1)\nu = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che in questo caso le λ, μ, ν, non sono più indipendenti, ma indicando con a, b, c, i coseni degli angoli che ciascuna delle rette che abbiamo immaginato condotte pei punti di applicazione delle forze comprende coi tre assi, e con k una quantità arbitraria si hanno le (Vedi la nota):

$$\lambda = ka, \qquad \mu = kb, \qquad \nu = kc.$$

Se questi valori si sostituiscono nella equazione (9) e si eguagliano a zero i coefficienti di k^2 e di k si ottengono le:

$$a(L_1a + M_1b + N_1c) + b(L_2a + M_2b + N_2c) + c(L_3a + M_3b + N_3c) = 0$$

$$(14)\qquad a(N_2 - M_3) + b(L_3 - N_1) + c(M_1 - L_2) = 0$$

le quali saranno le condizioni che debbono verificarsi perchè un sistema variato qualunque sia riducibile a risultante unica. Siccome poi la equazione (13) nella quale si pongano per λ, μ, ν i valori superiori dà origine alle stesse due equazioni (14), ne deduciamo che anche in questo caso, se un sistema variato qualunque è riducibile ad una risultante, il sistema dato ammette centro relativo di forze.

Digitized by Google

Le equazioni (14), insieme alla $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ serviranno a determinare nei casi particolari i valori di a, b, c, i quali individuano la direzione comune delle rette intorno le quali si debbono far ruotare le direzioni delle forze per ottenere i sistemi variati.

Consideriamo per esempio un sistema di forze dirette in un piano, se le direzioni delle forze di ogni sistema variato saranno situate in quel piano, le rette condotte pei loro punti di applicazione ed intorno alle quali si suppongono ruotare le direzioni delle forze, saranno perpendicolari a quel piano; per cui l' equazione del medesimo potrà scriversi:

$$ax + by + cz = d.$$

Ora le forze del sistema dato essendo dirette in questo piano saranno indentiche le equazioni che si ottengono ponendo nella equazione del piano stesso x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ..... in luogo delle x, y, z ed α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; .... invece delle α, β, γ nella:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Da queste ultime si deducono le:

$$(15)\quad \begin{cases} aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0, & aF_1 + bF_2 + cF_3 = 0, \\ aG_1 + bG_2 + cG_3 = 0 & aX + bY + cZ = 0; \end{cases}$$

e le prime danno:

$$(16)\quad \begin{cases} aE_1 + bF_1 + cG_1 = dX, \quad aE_2 + bF_2 + cG_2 = dY, \\ aE_3 + bF_3 + cG_3 = dZ \end{cases}$$

dalle quali:

$$(17)\quad \begin{cases} aL_1 + bM_1 + cN_1 = 0, \quad aL_2 + bM_2 + cN_2 = 0, \\ aL_3 + bM_3 + cN_3 = 0. \end{cases}$$

Da queste relazioni deducesi 1.° che un sistema di forze dirette in un piano è riducibile ad una sola risultante: 2.° che ha centro relativo di forze. Infatti dalle (15) si hanno facilmente le due:

$$aM_2 = bM_1, \qquad cN_1 = aN_3$$

Digitized by Google

per le quali la prima delle (17) si riduce alla:

$$L_1 + M_2 + N_3 = 0$$

nota equazione di condizione. Inoltre la prima delle equazioni (14) è identica a cagione delle medesime (17), e provasi facilmente esserlo anche la seconda potendosi ottenere il primo membro di essa moltiplicando la quarta delle (15) per $E_1 + F_2 + G_3$, e sottraendovi le altre tre moltiplicate ordinatamente per X, Y, Z.

Le coordinate u, v, w del centro delle forze di questo sistema si ponno determinare osservando che le equazioni

$$M_{x_1} - vZ_1 + wY_1 = 0\,, \qquad M_{y_1} - wX_1 + uZ_1 = 0\,,$$
$$M_{z_1} - uY_1 + vX_1 = 0$$

debbono essere soddisfatte identicamente. Quindi sostituendo nelle medesime per a_1, b_1, c_1 .... i loro valori formati colle quantità k, a, b, c dovranno essere nulli separatamente i coefficienti delle varie potenze di k. Dalla prima delle superiori si hanno in questo modo le tre equazioni:

$$c\{aF_1 + bF_2 + cF_3 - v(aX + bY + cZ)\}$$
$$= b\{aG_1 + bG_2 + cG_3 - w(aX + bY + cZ)\}$$
$$v(bX - aY) - w(aZ - cX) = aE_1 + bF_1 + cG_1 - a(E_1 + F_2 + G_3)$$
$$F_3 - vZ = G_2 - wY$$

la prima delle quali è identica per le (15), e la terza equivale alla identica:

$$M_x - vZ + wY = 0.$$

Quindi, per le (16), le u, v, w debbono soddisfare alle:

$$v(bX - aY) - w(aZ - cX) = dX - a(E_1 + F_2 + G_3)$$
$$w(cY - bZ) - u(bX - aY) = dY - b(E_1 + F_2 + G_3)$$
$$u(aZ - cX) - v(cY - bZ) = dZ - c(E_1 + F_2 + G_3)$$
$$F_3 - vZ = G_2 - wY\,, \qquad G_1 - wX = E_3 - uZ\,,$$
$$E_2 - uY = F_1 - vX$$

Digitized by Google

Ora, moltiplicando le prime tre equazioni superiori per a, b, c, e sommandole ottiensi la:

$$uX + vY + wZ = E_1 + F_2 + G_3$$

e sostituendo in quest'ultima per v, w i valori che si ponno dedurre dalla quinta e sesta; si ha:

$$uR^2 = E_1 X + E_2 Y + E_3 Z + N_2 - M_3$$

ed analogamente:

$$vR^2 = F_1 X + F_2 Y + F_3 Z + L_3 - N_1$$

$$wR^2 = G_1 X + G_2 Y + G_3 Z + M_1 - L_2 .$$

5.° Consideriamo come al § 2.° un secondo sistema di forma invariabile ed indichiamo con Q la grandezza di una forza qualunque; con a, b, c i coseni degli angoli che la direzione di essa fa coi tre assi, e con ξ, η, ζ, le coordinate del suo punto di applicazione. Se con L_r indichiamo il momento della coppia che ha origine dal primo sistema e che ha per asse la direzione della forza di grandezza Qr si avrà per la formola (6) del Cap. II. che:

$$L_r = a_r M_x + b_r M_y + c_r M_z + \lambda_r X + \mu_r Y + \nu_r Z$$

essendo:

$$\lambda_r = \eta_r c_r - \zeta_r b_r , \qquad \mu_r = \zeta_r a_r - \xi_r c_r , \qquad \nu_r = \xi_r b_r - \eta_r a_r ;$$

e ponendo:

$$X_1 = \Sigma Qa , \qquad Y_1 = \Sigma Qb , \qquad Z_1 = \Sigma Qc$$

$$M_{x_1} = \Sigma Q\lambda , \qquad M_{y_1} = \Sigma Q\mu , \qquad M_{z_1} = \Sigma Q\nu$$

si avrà:

$$\Sigma LQ = X_1 M_x + Y_1 M_y + Z_1 M_z + XM_{x_1} + YM_{y_1} + ZM_{z_1} .$$

Quindi, supponendo che i due sistemi sieno riducibili ad una sola risultante, le direzioni di queste si incontreranno quando sussista la equazione:

$$\Sigma LQ = 0 .$$

Digitized by Google

CAPITOLO VIII.

Delle condizioni per l'equilibrio di un sistema di forze applicate ad un punto.

1.° Un sistema di forze dicesi in equilibrio allorquando gli effetti delle forze si elidono, e quindi l'effetto complessivo del sistema è nullo. E condizioni d'equilibrio vengono denominate quelle relazioni fra gli elementi del sistema, le quali debbono necessariamente stabilirsi perchè il sistema sia in equilibrio, o che reciprocamente hanno luogo quando il sistema è in equilibrio.

Si è dimostrato al Cap. I.° che un sistema di forze applicate ad un punto può ridursi ad una sola forza, e che indicando con R la grandezza della medesima, con P quella di una qualunque delle forze del sistema, con α, β, γ i cosenî degli angoli che la direzione di questa fa con tre assi ortogonali, e ponendo:

$$X = \Sigma P\alpha \,, \qquad Y = \Sigma P\beta \,, \qquad Z = \Sigma P\gamma$$

si ha:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \,.$$

Ora l'effetto della forza di grandezza R è identico a quello del sistema dato, quindi è evidente che se quest'ultimo è in equilibrio dovrà essere $R = 0$, e reciprocamente che se si avrà $R = 0$ il sistema dato sarà in equilibrio. Avremo perciò quali condizioni d'equilibrio le tre seguenti:

$$\Sigma P\alpha = 0 \,, \qquad \Sigma P\beta = 0 \,, \qquad \Sigma P\gamma = 0$$

2.° Se il punto al quale sono applicate le forze non fosse libero come si è supposto nel paragrafo precedente, ma fosse obbligato a rimanere sopra una impenetrabile superficie, nel determinare le condizioni per l'equilibrio del sistema devesi tener conto della resistenza che la superficie opporrebbe al punto, la quale sarà diretta secondo la normale alla superficie corrispondente alla posizione del punto.

Se quindi consideriamo questa resistenza di grandezza N incognita, come un'altra forza agente sul punto, potrà il medesimo considerarsi come libero, e rappresentando con $F'(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie, si avranno quali condizioni per l'equilibrio del nuovo sistema le equazioni seguenti:

$$(1) \quad X + N\frac{F'(x)}{H} = 0, \quad Y + N\frac{F'(y)}{H} = 0, \quad Z + N\frac{F'(z)}{H} = 0,$$

posto:

$$H = \sqrt{\{F'^2(x) + F'^2(y) + F'^2(z)\}}.$$

Le condizioni per l'equilibrio del sistema dato si otterranno eliminando la N dalle tre superiori (1) per cui saranno le:

$$(2) \qquad \frac{X}{F'(x)} = \frac{Y}{F'(y)} = \frac{Z}{F'(z)}$$

unitamente all'equazione della superficie. Trasportando nelle (1) i termini che contengono N nel secondo membro si ha:

$$R = N$$

ed in conseguenza:

$$\frac{X}{R} = -\frac{F'(x)}{H}, \qquad \frac{Y}{R} = -\frac{F'(y)}{H}, \qquad \frac{Z}{R} = -\frac{F'(z)}{H}$$

dalle quali deducesi che se il sistema dato è in equilibrio, la resistenza che oppone la superficie è eguale alla gran-

dezza della risultante delle forze attive. e che le forze medesime agiscono per verso contrario.

3.° Supponiamo che il punto al quale sono applicate le forze sia costretto a stare sopra una linea a doppia curvatura; o con maggior precisione immaginando i piani dei circoli osculatori corrispondenti ai varj punti della linea, supponiamo che il punto debba rimanere aderente la linea in uno di questi piani. Si avranno così due resistenze opposte dalla linea, l'una diretta secondo la normale ordinaria della linea, corrispondente alla posizione del punto, l'altra diretta secondo la perpendicolare al piano del circolo osculatore nel luogo occupato dal punto. Se si indicano le grandezze incognite di queste resistenze con N, Q, e riteniamo le medesime agenti sul punto; avremo quali condizioni d'equilibrio del nuovo sistema le seguenti:

$$(3) \qquad \begin{cases} X + Na_2 + Qa_3 = 0 \\ Y + Nb_2 + Qb_3 = 0 \\ Z + Nc_2 + Qc_3 = 0 \end{cases}$$

nelle quali a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, denotano i coseni degli angoli che la normale ordinaria, e la perpendicolare al piano del circolo osculatore, corrispondenti al luogo della linea in cui trovasi il punto, fanno coi tre assi ortogonali.

Se con a_1, b_1, c_1, si indicano i coseni degli angoli che la tangente la linea in quel punto fa cogli assi, moltiplicando le equazioni superiori ordinatamente per quei coseni e sommandole si ha:

$$(4) \qquad Xa_1 + Yb_1 + Zc_1 = 0$$

la quale e le equazioni della linea sono le condizioni per l'equilibrio del sistema dato. La equazione (4) mostra che per l'equilibrio del sistema dovrà essere nulla la componente, diretta secondo la tangente della linea, della risultante delle forze attive, cioè che questa risultante deve essere diretta nel piano normale alla curva.

Per determinare i valori delle resistenze N, Q si moltiplichino le equazioni (3) prima per a_2, b_2, c_2; quindi per a_3, b_3, c_3 e si sommino dopo ciascuna moltiplicazione. Si avranno le:

$$N = -(Xa_2 + Yb_2 + Zc_2)$$
$$Q = -(Xa_3 + Yb_3 + Zc_3)$$

cioè le componenti, della risultante del sistema dato, le direzioni delle quali coincidono con quelle delle resistenze N, Q, sono rispettivamente eguali in grandezza a queste resistenze, ed agenti per verso contrario.

Digitized by Google

CAPITOLO IX.

Delle condizioni per l'equilibrio di un sistema di forma invariabile, e dell'asse di equilibrio.

1.° Abbiamo dimostrato al Cap. III come in generale si possa sempre determinare un sistema composto di una forza e di una coppia, il quale produca lo stesso effetto di un dato sistema di forma invariabile; ed abbiamo trovato che indicando con R la grandezza di quella forza e con M il momento della coppia, si avranno le:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 , \qquad M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$$

nelle quali le X, Y ecc. hanno i valori (1) (2) del Cap. III. Si avrà quindi quale condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema dato, d'essere in equilibrio il sistema equivalente. Ora gli effetti di una forza e di una coppia non possono elidersi, qualunque sia la loro posizione relativa: dunque per l'equilibrio del sistema equivalente dovrà essere nulla la grandezza della risultante, e nullo il momento della coppia risultante.

Le condizioni d'equilibrio per un sistema di forma invariabile saranno quindi le:

$$R = 0 , \qquad M = 0$$

ossia, affinchè il sistema sia in equilibrio, dovranno essere soddisfatte dagli elementi del sistema le sei equazioni:

$$(1) \begin{cases} \Sigma P\alpha = 0, & \Sigma P\beta = 0, & \Sigma P\gamma = 0 \\ \Sigma P(y\gamma - z\beta) = 0, & \Sigma P(z\alpha - x\gamma) = 0, & \Sigma P(x\beta - y\alpha) = 0; \end{cases}$$

Digitized by Google

e reciprocamente quando queste equazioni sieno soddisfatte da quegli elementi, il sistema è in equilibrio.

Il numero di queste condizioni d'equilibrio può diminuire quando suppongasi che le forze del sistema hanno direzioni particolari. Si consideri p. e. un sistema di forze parallele; le quantità α, β, γ ritenendo in questo caso lo stesso valore per ciascuna forza, le prime tre equazioni (1) si riducono alla sola:

$$\Sigma P = 0 \tag{2}$$

e le altre due seguenti:

$$\frac{\Sigma Px}{\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\gamma}. \tag{3}$$

Sia:

$$Ax + By + Cz = D$$

l'equazione di un piano parallelo alla direzione delle forze; si avrà:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

ossia per la (4):

$$A\Sigma Px + B\Sigma Py + C\Sigma Pz = 0,$$

alla quale in causa della (2) può darsi la forma:

$$\Sigma P \left\{ \frac{D - (Ax + By + Cz)}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} \right\} = 0.$$

Ma la espressione fra parentesi è la lunghezza della perpendicolare condotta dal punto di coordinate x, y, z al piano immaginato, quindi, denominando *momento di una forza* rispetto ad un piano, il prodotto della grandezza della forza per la distanza che il punto di applicazione della medesima ha dal piano; il primo membro dell' equazione superiore è la somma algebrica dei momenti delle forze rispetto ad un piano parallelo alla direzione delle forze

stesse. Dunque per l'equilibrio di un sistema di forze parallele dovrà essere nulla la somma algebrica delle grandezze delle forze, ed essere nulle a parte le somme algebriche dei momenti delle forze rispetto a due piani paralleli alla direzione di esse e non paralleli fra loro.

2.° Rammentando la espressione:

$$L_r = a_r M_x + b_r M_y + c_r M_z + \lambda_r X + \mu_r Y + \nu_r Z,$$

la quale al Cap. IV abbiamo trovato rappresentare il momento di una coppia risultante e di una coppia componente; è evidente che supposte soddisfatte le equazioni (1) si hanno le:

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0, \quad L_4 = 0, \quad L_5 = 0, \quad L_6 = 0$$

e siccome supponendo verificate queste ultime dagli elementi del sistema lo sono anche le (1) purchè:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_6, & b_6, & c_6, & \lambda_6, & \mu_6, & \nu_6 \end{vmatrix} \text{ non } = 0$$

ne deriva che le equazioni (4) saranno condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un sistema di forma invariabile quando sussista la ineguaglianza superiore; cioè quando gli assi di quelle sei coppie non saranno incontrati da una medesima retta.

Così saranno condizioni per l'equilibrio del sistema le:

$$X = 0, \qquad L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 0$$

o le analoghe, giacchè soddisfatte le (1) lo saranno anche queste, e verificate queste ultime lo saranno anche le (1) purchè:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_5 & b_5 & c_5 & \mu_5 & \nu_5 \end{vmatrix} \text{ ed un' altra analoga non } = 0.$$

Digitized by Google

cioè (Cap. IV § 6) gli assi di quelle cinque coppie non possono essere incontrati da due rette.

Le:

$$X = 0\,, \quad Y = 0\,, \qquad L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0$$

o le analoghe saranno esse pure condizioni per l'equilibrio, quando gli assi delle quattro coppie non possano essere incontrati da più di due rette (Cap. VI § 5); e le:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \qquad L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_3 = 0$$

saranno condizioni d'equilibrio quando:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ non} = 0$$

cioè quando gli assi delle coppie non sieno paralleli ad un piano.

Notiamo che anche alle tre equazioni:

$$X = 0\,, \qquad Y = 0\,, \qquad Z = 0$$

possiamo sostituirne altre tre più generali; giacchè ponendo

$$X_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z$$
$$Y_1 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z$$
$$Z_1 = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z$$

le tre superiori danno origine alle:

$$X_1 = 0\,, \qquad Y_1 = 0\,, \qquad Z_1 = 0\,.$$

e queste a quelle quando si verifichi l'ineguaglianza (5). Ora le X, Y, Z, sono le somme algebriche delle grandezze delle componenti delle forze del sistema, componenti dirette secondo tre rette qual si vogliano purchè non parallele ad un piano; quindi le ultime equazioni sono più generali delle superiori.

3.° Consideriamo un sistema di forma invariabile in equilibrio, e supponiamo che esso venga trasportato in un'altra posizione in modo però che le direzioni delle forze in questa seconda posizione sieno parallele ciascuna a ciascuna alle direzioni che avevano nella prima posizione. Quali saranno le condizioni che debbono verificarsi perchè il sistema nella nuova posizione sia ancora in equilibrio, e quali quelle che individuano questa seconda posizione? Indicando con ξ, η, ζ, le coordinate del punto di applicazione della forza di grandezza P nella seconda posizione del sistema, le condizioni per l'equilibrio del medesimo sono:

$$(6)\begin{cases} \Sigma P\alpha = 0, \quad \Sigma P\beta = 0, \quad \Sigma P\gamma = 0, \\ \Sigma P(\eta\gamma - \zeta\beta) = 0, \quad \Sigma P(\zeta\alpha - \xi\gamma) = 0, \quad \Sigma P(\xi\beta - \eta\alpha) = 0 \end{cases}$$

delle quali le prime tre sono verificate avendo supposto essere, nella prima posizione, il sistema in equilibrio. Si immagini il sistema nella seconda posizione riferito ad una nuova terna di assi ortogonali, la quale sia quella che otterrebbesi trasportando la prima terna, supposta invariabilmente unita al sistema, insieme al sistema medesimo. Se con e, f, g, si indicano le coordinate della nuova origine, e con a_1, b_1, c_1.... i coseni degli angoli che le due terne di assi comprendono rispettivamente, le equazioni (6) avendo riguardo alle (1) si ponno porre sotto la forma:

$$a_2 F + b_2 E + c_2 \Sigma P\gamma z - a_3 G - b_3 \Sigma P\beta y - c_3 E = 0$$
$$a_3 \Sigma P\alpha x + b_3 G + c_3 F - a_1 F - b_1 E - c_1 \Sigma P\gamma z = 0$$
$$a_1 G + b_1 \Sigma P\beta y + c_1 E - a_2 \Sigma P\alpha x - b_2 G - c_2 F = 0$$

essendo:

$$E = \Sigma P\gamma y = \Sigma P\beta z, \quad F = \Sigma P\alpha z = \Sigma P\gamma x, \quad G = \Sigma P\beta x = \Sigma P\alpha y.$$

Si sostituiscano nelle tre equazioni superiori in luogo dei

nove coseni a_1, b_1 .... i loro valori formati colle tre indeterminate λ, μ, ν (Nota) e facendo per brevità:

$$\Sigma P\gamma z + \Sigma P\beta y = L\,, \quad \Sigma P\alpha x + \Sigma P\gamma z = M\,, \quad \Sigma P\beta y + \Sigma P\alpha x = N$$

si otterranno le tre seguenti:

$$(-\lambda L + \mu G + \nu F) + \nu(\lambda G - \mu M + \nu E) - \mu(\lambda F + \mu E - \nu N) = 0$$
$$-\nu(-\lambda L + \mu G + \nu F) + (\lambda G - \mu M + \nu E) + \lambda(\lambda F + \mu E - \nu N) = 0$$
$$\mu(-\lambda L + \mu G + \nu F) - \lambda(\lambda G - \mu M + \nu E) + (\lambda F + \mu E - \nu N) = 0$$

per la sussistenza delle quali dovranno essere

$$(7) \quad \begin{cases} -\lambda L + \mu G + \nu F = 0 \\ \lambda G - \mu M + \nu E = 0 \\ \lambda F + \mu E - \nu N = 0. \end{cases}$$

Dunque la condizione che deve essere verificata dagli elementi del sistema affinchè il medesimo sia in equilibrio in una seconda posizione sarà la

$$(8) \quad \begin{vmatrix} -L & G & F \\ G & -M & E \\ F & E & -N \end{vmatrix} = 0$$

e da due qualsivogliano fra le (7) si dedurranno i valori dei rapporti $\lambda : \mu : \nu$ i quali determinano quella nuova posizione. Ma questi valori (Nota) individuano la direzione di una retta per la quale ha luogo la proprietà, che immaginandola condotta dall'origine dei primi assi, questi si ponno far ruotare intorno alla medesima in modo da divenire paralleli rispettivamente agli assi della seconda terna. Dunque effettivamente il sistema può trasportarsi dalla prima nella seconda posizione facendolo ruotare intorno alla retta determinata dalle equazioni (7). La retta medesima per questa proprietà viene denominata *asse di equilibrio.*

Notiamo che l'equazione (8) sarebbe anche la condizione la quale deve essere soddisfatta perchè un sistema variato

ottenuto come si disse al Cap. VII sia in equilibrio, e le equazioni (7) servirebbero a determinare l'asse attorno al quale devono ruotare le forze.

Supponiamo, per esempio, che il sistema che si considera sia di forze parallele: essendo in questo caso

$$E = \gamma\Sigma Py = \beta\Sigma Pz, \text{ ecc.} \qquad L = \beta\Sigma Py + \gamma\Sigma Pz, \text{ ecc.}$$

si hanno le:

$$-\alpha L + \beta G + \gamma F = 0, \quad \alpha G - \beta M + \gamma E = 0, \quad \alpha F + \beta E - \gamma N = 0$$

quindi l'equazione di condizione (8) è soddisfatta; e l'asse di equilibrio è parallelo alla direzione delle forze.

4.° Se il sistema dato non fosse libero, ma un punto del medesimo fosse *fisso*, mediante la introduzione di una forza agente su quel punto, di grandezza e direzione incognita, la quale supponesi produca sul sistema lo stesso effetto del punto fisso, si otterrà un nuovo sistema completamente libero. Indicando con a, b, c le coordinate del punto fisso, con N la grandezza di quella forza, con l, m, n i coseni degli angoli che la direzione della medesima comprende coi tre assi; si avranno quindi quali condizioni d'equilibrio del nuovo sistema le equazioni:

$$(9) \quad X + Nl = 0, \qquad Y + Nm = 0, \qquad Z + Nn = 0$$

$$M_x + N(bn - cm) = 0, \qquad M_y + N(cl - an) = 0,$$
$$M_z + N(am - bl) = 0.$$

Ora se da queste sei equazioni si eliminano le quantità Nl, Nm, Nn, si avranno tre equazioni fra i soli elementi del sistema dato, le quali saranno le condizioni per l'equilibrio del medesimo. Queste equazioni sono:

$$M_x + bZ - cY = 0, \qquad M_y + cX - aZ = 0,$$
$$M_z + aY - bX = 0;$$

ma i primi membri di esse rappresentano i momenti delle coppie componenti della coppia risultante corrispondente

al punto fisso; dunque se in un sistema di forma invariabile vi sarà un punto fisso, dovrà annullarsi per l'equilibrio il momento della coppia risultante corrispondente al medesimo.

La forza di grandezza N rappresenta evidentemente l'azione che il sistema della forza P esercita sul punto fisso; dalle prime tre equazioni (9) deducesi essere quella forza e la risultante del sistema eguali in grandezze, dirette secondo la stessa retta ed agenti per versi contrari.

Se nel sistema vi fossero due punti fissi, indicando con N_1; a_1, b_1, c_1; l_1, m_1, n_1 pel secondo punto quantità analoghe alle N, a, b.... si avranno quali condizioni per l'equilibrio del nuovo sistema le equazioni:

$$X + Nl + N_1 l_1 = 0, \quad Y + Nm + N_1 m_1 = 0, \quad Z + Nn + N_1 n_1 = 0$$

$$(10) \quad \begin{aligned} &M_x + N(bn - cm) + N_1 (b_1 n_1 - c_1 m_1) = 0 \\ &M_y + N(cl - an) + N_1 (c_1 l_1 - a_1 n_1) = 0 \\ &M_z + N(am - bl) + N_1 (a_1 m_1 - b_1 l_1) = 0. \end{aligned}$$

Sieno λ, μ, ν i coseni degli angoli che la retta che unisce i punti a, b, c; a_1, b_1, c_1 forma cogli assi, r la distanza fra i punti stessi: essendo

$$\lambda = \frac{a - a_1}{r}, \qquad \mu = \frac{b - b_1}{r}, \qquad \nu = \frac{c - c_1}{r}$$

ed in conseguenza

$$b\nu - c\mu = \frac{1}{r}(cb_1 - bc_1), \qquad c\lambda - a\nu = \frac{1}{r}(ac_1 - ca_1),$$

$$a\mu - b\lambda = \frac{1}{r}(ba_1 - ab_1),$$

moltiplicando ordinatamente le equazioni (10) per le sei quantità primi membri di queste equazioni, e sommandole ottiensi la:

$$\lambda M_x + \mu M_y + \nu M_z + (b\nu - c\mu) X + (c\lambda - a\nu) Y + (a\mu - b\lambda) Z = 0$$

Digitized by Google

la quale equazione essendo fra i soli elementi del sistema sarà la condizione per l'equilibrio del medesimo. Questa equazione, rammentando la forma (16) del Cap. III, equivale al dover esser nullo il momento della coppia (in generale componente), la quale ha per asse la retta che unisce i punti fissi. Se questa retta fosse asse di coppia risultante corrispondente ad uno dei punti fissi, dovendo essere per l'equilibrio nullo il momento di questa coppia, il sistema delle due forze N, N_1 dovrà ridursi ad una sola risultante di grandezza e direzione eguali a quelle della risultante del sistema delle forze P ed agente per verso contrario. In generale il sistema delle forze attive P dovendo essere equivalente al sistema delle forze passive N, N_1, varranno pei medesimi le considerazioni esposte al Cap. V.

Digitized by Google

NOTA.

Rappresentando con a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 i nove coseni degli angoli, che due terne di assi ortogonali comprendono fra loro, si hanno le relazioni:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1\,. & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0 \end{cases}$$

dalle quali deduconsi, come è noto, le nove:

$$(2)\quad \begin{cases} a_1=b_2c_3-b_3c_2 & b_1=c_2a_3-c_3a_2 & c_1=a_2b_3-a_3b_2 \\ a_2=b_3c_1-b_1c_3 & b_2=c_3a_1-c_1a_3 & c_2=a_3b_1-a_1b_3 \\ a_3=b_1c_2-b_2c_1 & b_3=c_1a_2-c_2a_1 & c_3=a_1b_2-a_2b_1 \end{cases}$$

e da queste le sei:

$$(3)\quad \begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0. \end{cases}$$

Essendo i nove coseni $a_1, b_2 \ldots$ legati da sole sei equazioni indipendenti, si potranno esprimere sei di essi in funzione degli altri tre. Questi tre coseni dovranno essere indipendenti fra loro, quindi potranno formare una delle sei terne:

$$a_1,\ b_2,\ c_3;\qquad a_2,\ b_3,\ c_1;\qquad a_3,\ b_1,\ c_2$$

$$a_1,\ b_3,\ c_2,\qquad a_2,\ b_1,\ c_3;\qquad a_3,\ b_2,\ c_1\,.$$

Scegliendo la prima terna si osservi che dalle formole (1) (2) si hanno le:

$$b_1^2=1-a_1^2-c_1^2,\qquad a_2^2=1-b_2^2-c_2^2,\qquad a_2b_1=a_1b_2-c_3$$

le quali danno:

$$(b_1\pm a_2)^2=2-a_1^2-b_2^2-c_1^2-c_2^2\pm 2(a_1b_2-c_3)$$

od essendo per le (3):

$$c_3^2=1-c_1^2-c_2^2$$

si ha:

$$(b_1 \pm a_2)^2 = (1 \mp c_3)^2 - (a_1 \mp b_3)^2 .$$

Quindi:

$$b_1 + a_3 = \sqrt{\{(1-c_3)^2 - (a_1 - b_3)^2\}}, \quad b_1 - a_3 = \sqrt{\{(1+c_3)^2 - (a_1 + b_3)^2\}};$$

ed analogamente ottengonsi le quattro altre:

$$a_3 + c_1 = \sqrt{\{(1-b_2)^2 - (c_3 - a_1)^2\}} \qquad a_3 - c_1 = \sqrt{\{(1+b_2)^2 - (c_3 + a_1)^2\}}$$

$$c_2 + b_3 = \sqrt{\{(1-a_1)^2 - (b_2 - c_3)^2\}} \qquad c_2 - b_3 = \sqrt{\{(1+a_1)^2 - (b_2 + c_3)^2\}};$$

per cui ponendo

$$p = 1 + a_1 + b_2 + c_3, \qquad l = 1 + a_1 - b_2 - c_3,$$
$$m = 1 - a_1 + b_2 - c_3, \qquad n = 1 - a_1 - b_2 + c_3,$$

si hanno le formole:

$$(4) \begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}\{\sqrt{lm} + \sqrt{pn}\} & a_3 = \frac{1}{2}\{\sqrt{ln} + \sqrt{pm}\} & c_2 = \frac{1}{2}\{\sqrt{mn} + \sqrt{pl}\} \\ a_2 = \frac{1}{2}\{\sqrt{lm} + \sqrt{pn}\} & c_1 = \frac{1}{2}\{\sqrt{ln} + \sqrt{pm}\} & b_3 = \frac{1}{2}\{\sqrt{mn} + \sqrt{pl}\} \end{cases}$$

per le quali sono espressi in funzione di a_1, b_2, c_3 i valori degli altri sei coseni.

I valori dei nove coseni si ponno anche esprimere in funzione di tre quantità indeterminate λ, μ, ν nel modo seguente. Posto per brevità

$$h = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 .$$

si suppongano

$$hl = 4\lambda^2, \qquad hm = 4\mu^2, \qquad hn = 4\nu^2:$$

per queste posizioni, essendo

$$p + l + m + n = 4, \qquad p + l - m - n = 4a_1$$
$$p - l + m - n = 4b_2, \qquad p - l - m + n = 4c_3$$

si otterrà dapprima la $hp = 4$, ed in conseguenza

$$(5)\ ha_1 = 1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, \quad hb_2 = 1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2, \quad hc_3 = 1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2;$$

inoltre essendo

$$h\sqrt{lm} = 4\lambda\mu, \qquad h\sqrt{nl} = 4\lambda\nu, \qquad h\sqrt{mn} = 4\mu\nu$$
$$h\sqrt{np} = 4\nu, \qquad h\sqrt{mp} = 4\mu, \qquad h\sqrt{lp} = 4\lambda,$$

si avranno per le (4) le seguenti:

$$(6)\quad \begin{cases} hb_1 = 2(\lambda\mu + \nu), & ha_3 = 2(\lambda\nu + \mu), & hc_2 = 2(\mu\nu + \lambda), \\ ha_2 = 2(\lambda\mu - \nu), & hc_1 = 2(\lambda\nu - \mu), & hb_3 = 2(\mu\nu - \lambda). \end{cases}$$

Le tre indeterminate λ, μ, ν sono suscettibili di una rappresentazione geometrica. Infatti si indichino con a, b, c i coseni degli angoli che una retta indeterminata, la quale supporremo passare per l'origine comune delle due terne d'assi ortogonali, fa cogli assi di una di esse, e con k una quantità indeterminata. Essendo le a, b, c legate dalla equazione $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, si potrà evidentemente porre

$$(7)\qquad \gamma = ka, \qquad \mu = kb, \qquad \nu = kc;$$

ed osservando che pei valori (5) (6) dei coseni a_1, b_1 .... si hanno le tre relazioni:

$$a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu = \lambda, \qquad a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu = \mu, \qquad a_3\lambda + b_3\mu + c_3\nu = \nu,$$

sostituendo si giungerà alle

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = a, \qquad aa_2 + bb_2 + cc_2 = b, \qquad aa_3 + bb_3 + cc_3 = c;$$

le quali dimostrano che la retta indeterminata deve comprendere cogli assi della seconda terna angoli rispettivamente eguali a quelli che comprende cogli assi della prima terna. Notiamo che ciò è sempre possibile, giacchè l'equazione di condizione che ottiensi eliminando i rapporti $a : b : c$ dalle equazioni superiori, ossia la

$$\begin{vmatrix} a_1 - 1, & b_1, & c_1 \\ a_2 & b_2 - 1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

è identica, il che rendesi manifesto scrivendo lo sviluppo di quel determinante sotto la forma:

$$(a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_2c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - 1) +$$
$$(c_2 + a_2b_1 - a_1b_2) + (b_3 + a_3c_1 - a_1c_3) + (a_1 + b_2c_3 - b_3c_2)$$

ed osservando che per le (2) (3) annullansi a parte ciascuna di quelle quattro espressioni.

Gli angoli diedri determinati dalle tre coppie di piani passanti per la retta e per gli assi corrispondenti in ciascuna terna sono eguali fra loro. Infatti pei valori (5) di a_1, b_2, c_3, si hanno le:

$$h(a_1 - 1) = -2(\mu^2 + \nu^2) = -2k^2(b^2 + c^2) = -2k^2(1 - a^2)$$
$$h(b_2 - 1) = -2(\nu^2 + \lambda^2) = -2k^2(c^2 + a^2) = -2k^2(1 - b^2)$$
$$h(c_3 - 1) = -2(\lambda^2 + \mu^2) = -2k^2(a^2 + b^2) = -2k^2(1 - c^2)$$

e quindi

$$\frac{a_1 - 1}{1 - a^2} = \frac{b_2 - 1}{1 - b^2} = \frac{c_3 - 1}{1 - c^2}$$

ed anche

$$\frac{a_1 - a^2}{1 - a^2} = \frac{b_2 - b^2}{1 - b^2} = \frac{c_3 - c^2}{1 - c^2}.$$

Ora queste espressioni sono ordinatamente eguali ai coseni degli angoli diedri compresi da quelle coppie di piani, per cui quegli angoli saranno eguali; ed indicando con θ il loro valore comune si avranno le:

$$a_1 = (1 - a^2)\cos.\theta + a^2, \quad b_2 = (1 - b^2)\cos.\theta + b^2, \quad c_3 = (1 - c^2)\cos.\theta + c^2$$

dalle quali

$$a_1 + b_2 + c_3 = 1 + 2\cos.\theta$$

e per le (5):

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Mediante questa relazione potremo dare anche alla indeterminata k una rappresentazione geometrica; giacchè dalla somma dei quadrati delle (7) ottiensi

$$k = \text{tang.} \tfrac{1}{2}\theta$$

È evidente che facendo ruotare di un angolo θ una delle due terne d'assi intorno a quella retta, le due terne medesime vengono a coincidere.

765

81

Z

6 6

PUBBLICAZIONI DEL DOTTOR FRANCESCO VALLARDI

TIPOGRAFO-EDITORE IN MILANO CONTR. S. MARGHERITA N. 5.

AMBROSOLI GIUS. (prof.) **Prime nozioni di Fisica.** Un vol. con fig. 197 intercalate nel testo di 1200 pag., diviso in 2 parti.

BEUDANT. **Mineralogia e Geologia,** di pag. 800 e 775 fig., 2.ª ediz. sulla 5.ª parigina, traduz. con note importanti dei prof. *V. Masserotti* e *G. Arpesani.*

BORELLA e CAMUSSO. **Nozioni sul Drenaggio,** ossia Arte di prosciugare i terreni umidi, 1857. Un volume di pagine 242 con 91 figure.

BREWER. **La Chiave della scienza,** ovvero i Fenomeni di tutti i giorni. Versione italiana con note ed aggiunte del dott. *Gemello Gorini.* Un vol. di p. 488 e figure nel testo.

CANTONI dott. GAETANO. **Trattato completo d'Agricoltura** compilato dietro le più recenti cognizioni scientifiche e pratiche. Due volumi, di pag. 744 e 524 con 521 figure.

DANSI. **Elementi di Storia naturale — Botanica.**

DE-FILIPPI FILIPPO (prof.) **Delle funzioni riproduttive negli animali,** in complemento all'edizione italiana di ZOOLOGIA. 2.ª ediz., di pag. 118 con 72 fig.

DE-JUSSIEU. **Botanica,** di pag. 640 con 688 fig., e varie tabelle a stampa, 2.ª ediz. italiana per cura del prof. *Balsamo Crivelli.*

GANOT A. (prof.) **Trattato elementare di Fisica sperimentale ed applicata, e di Meteorologia.** Quinta ediz. ital. sulla 7.ª parigina, per cura dei prof. *C. Hajech* e *V. Masserotti.* Un vol. di pag. 868 con 562 figure intercalate nel testo.

LIEBIG. **I principj fondamentali della Chimica agraria,** in relazione alle ricerche istituite in Inghilterra, 1.ª traduzione italiana eseguita sulla 2.ª ediz. tedesca per cura di *Alfonso Cossa,* di pag. 128.

LO STESSO. **Teoria e pratica dell'Agricoltura,** traduz. di *Alfonso Cossa,* 1857, di pag. 128.

MILNE EDWARDS. **Zoologia,** di pag. 668 con 475 figure e tabella a stampa, 2.ª ediz. italiana per cura del prof. *V. Masserotti.*

OMBONI GIOV. (prof.) **Cenni sullo stato geologico dell'Italia,** in appendice al Corso di Geologia di *Beudant.* Un vol. in-16, di pag. 164 con 70 figure, e tavola colorata.

REGNAULT. **Primi elementi di Chimica,** versione ital. per cura del profess. *V. Masserotti.* Seconda edizione riveduta e corretta. Un vol. di pag. 608 con 142 fig.

STRAMBIO dottor GAETANO. **Trattato elementare d'Anatomia descrittiva,** e di preparazioni anatomiche, desunto dai lavori di *A. Jamain, Ph. C. Sappey, A. Verneuil.* Due vol. in 16. in bella carta con 229 magnifiche figure.

TASSO. **La Gerusalemme liberata,** edizione in-8.° illustrata da 200 incisioni colla vita dell'Autore e note storiche a ciascun canto di *G. Sacchi.* Due vol. in uno di pag. 758, con magnifico ritratto del Tasso a bulino.

WILSON. **Igiene della pelle** nei suoi rapporti colla salute. Un vol. di pag. 368 con 54 figure, trad. sulla 5.ª ediz. con aggiunte e note del D. *Agostino Bertani.*

ELEMENTI DI PATOLOGIA GENERALE del **prof. A. F. Chomel** tradotti ed annotati sulla quarta edizione francese dal **dott. Luigi Calori** prof. di Anatomia nell'università di Bologna. Due vol. in-8.° grande di pag. 464-424.

SULLA EDUCAZIONE ED ISTRUZIONE GIOVANILE, SCRITTI VARII dell' **ab. Francesco Regonati — GIORNALE D' UN COLLEGIO di Niccolò Tommaseo,** tradotto dal francese e ristampato coll'assenso dell'autore. Un volume in-16 grande.

L' INDIA CONTEMPORANEA e **STORIA DELL' INSURREZIONE DEL 1857** del **sig. De-Lanoye,** prima versione dal francese di **F. G. B.** Un vol. in-16.° grande di pag. 608 illustrato di una carta geografica dell'India.

POESIE MILANESI E ITALIANE di **Giovanni Ventura.** Nuova edizione con ammende dell' autore ed aggiunte di parecchie composizioni. Un vol. in-16 grande.

IN CORSO DI STAMPA

IL MUSEO DELLE SCIENZE E DELLE ARTI del **dottor Dionigi Lardner.** Prima traduzione italiana, con note ed aggiunte per cura dei **più distinti professori in ciascuna materia.** Opera illustrata da più di 1000 incisioni. Sei volumi in-8° grande di circa 25 dispense ciascuno; se ne pubblicano due ogni sabato di pag. 16 al prezzo di 25 cent. di franco ognuna.